

Le PAPR

Caractérisation, problèmes et solutions

Yves LOUËT
IETR
Supélec, Équipe SCEE

Judi 24 Mars 2005 – Séminaire SCEE

Contenu de la présentation

1. Positionnement du problème
2. Définitions du PAPR et dérivées
3. Facteurs influents
4. Caractérisations en modulations monoporteuses
5. Caractérisations en modulations multiporteuses
6. Méthodes de traitement des non linéarités
7. Conclusions et travaux en cours

1. **Positionnement du problème**
2. Définitions du PAPR et dérivées
3. Facteurs influents
4. Caractérisations en modulations monoporteuses
5. Caractérisations en modulations multiporteuses
6. Méthodes de traitement des non linéarités
7. Conclusions et travaux en cours

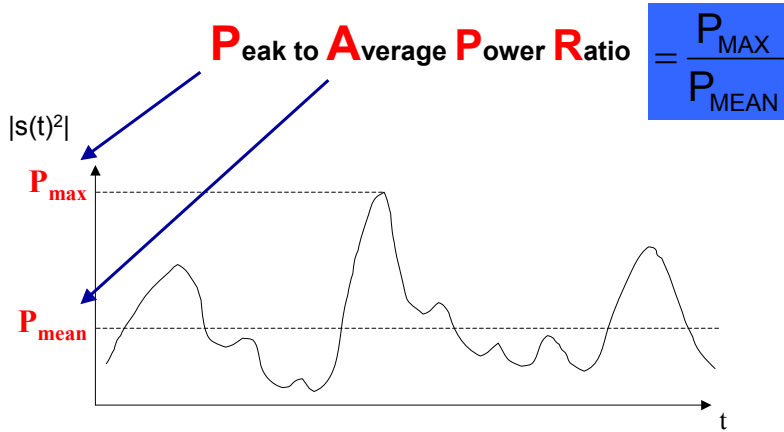
« Côté amplificateur de puissance »

- la puissance est un des facteurs clés d'un système de télécommunications et de son dimensionnement
- Étage clé d'un système de télécommunications : l'amplificateur de puissance
- 60% de la consommation d'un terminal 2.5 G est attribuée à l'amplificateur de puissance RF

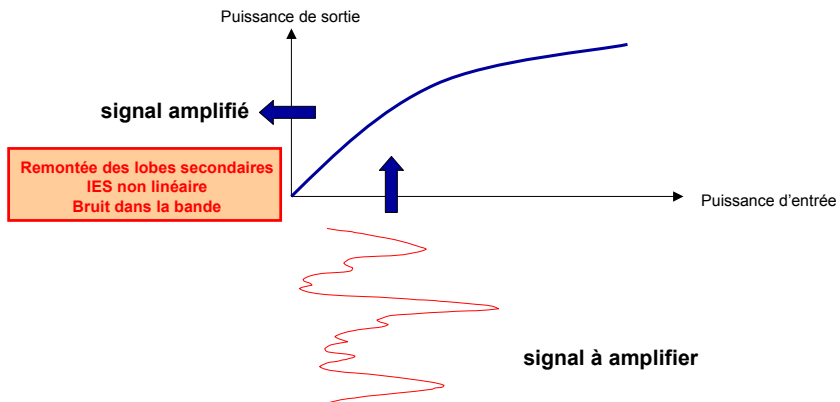
Constats « n'allant pas dans le bon sens » :

- Le rendement des amplificateurs est faible (au mieux 50%)
- Les amplificateurs ont des caractéristiques non linéaires

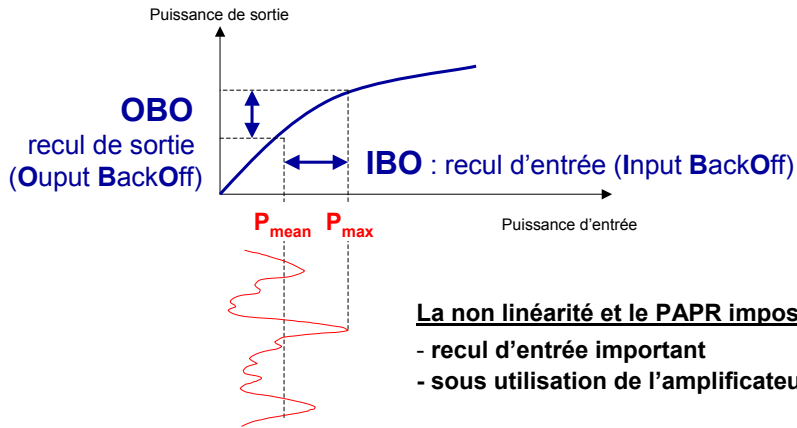
« Côté PAPR »



Conséquences : amplificateur + PAPR



Conséquences : amplificateur + PAPR



[Retour](#)

UMR
6164



Axes de recherche autour du PAPR

- 1. Caractérisation mathématique du PAPR**
 - majorant (fin)
 - distribution
 - fonction de répartition
 - moments
 - facteurs influents
- 2. Méthodes pour amplifier « correctement » un signal à fort PAPR**
 - A l'émission ou la réception
 - Réduction du PAPR
 - Fonction d'amplification
 - Traitement du signal

UMR
6164



1. Positionnement du problème
2. **Définitions du PAPR et dérivées**
3. Facteurs influents
4. Caractérisations en modulations monoporteuses
5. Caractérisations en modulations multiporteuses
6. Méthodes de traitement des non linéarités
7. Conclusions et travaux en cours

Premier constat :

Il existe une importante variété de définitions similaires au PAPR :

- PMEPR : Peak to Mean Envelop Power Ratio
- CR : Crest Factor
- PEP : Peak Envelop Power

⇒ *nécessité d'uniformiser ces définitions*

Introduction du Power Ratio (PR) (Palicot, Louët, soumission EUSIPCO 05)

Déclinaison du PR selon le PAPR, PMEPR, CF, PEP,

Deuxième constat :

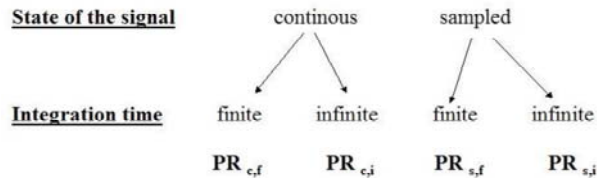
On doit prendre en compte l'état du signal et le temps d'intégration

Le Power Ratio (PR)

Définition générale :

$$PR = \frac{\text{Max}\{S^2\}}{E\{S^2\}}$$

Cas de figure possibles :

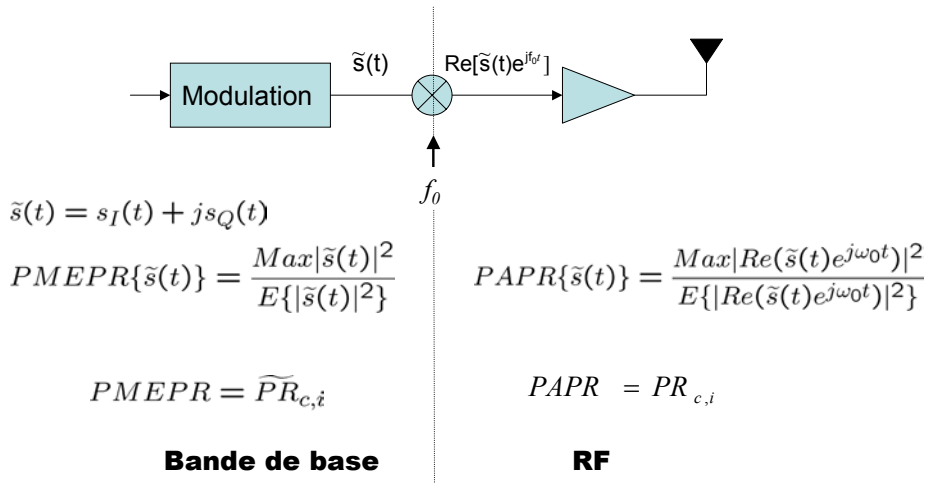


Le Power Ratio (PR)

| Cas continu, infini et fini | Cas discret, infini et fini |
|---|--|
| $PR_{c,i}\{s(t)\} = \frac{\text{Max} s(t) ^2}{E\{ s(t) ^2\}}$ | $PR_{s,i}\{s(k)\} = \frac{\text{Max} s(k) ^2}{E\{ s(k) ^2\}}$ |
| $PR_{c,f}(T)\{s(t)\} = \frac{\text{Max}_{[0,T]} s(t) ^2}{\frac{1}{T} \int_T s(t) ^2 dt}$ | $PR_{s,f}(N)\{s(k)\} = \frac{\text{Max}_{k \in [0, N-1]} s(k) ^2}{\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} s(k) ^2}$ |
| $\lim_{T \rightarrow +\infty} PR_{c,f}(T) = PR_{c,i}$ | $\lim_{N \rightarrow \infty} PR_{s,f}(N) = PR_{s,i}$ |

s(t) : bande de base ou RF

Lien entre le PR et les relations usuelles



Lien entre le PR et les relations usuelles (suite)

$$CF = \sqrt{PAPR} = \sqrt{PR_{c,i}} \quad \text{in RF conditions}$$

$$CF = \sqrt{PMEPR} = \sqrt{\tilde{P}R_{c,i}} \quad \text{in baseband conditions}$$

1. Positionnement du problème
2. Définitions du PAPR et dérivées
3. **Facteurs influents**
4. Caractérisations en modulations monoporteuses
5. Caractérisations en modulations multiporteuses
6. Méthodes de traitement des non linéarités
7. Conclusions et travaux en cours

Le PR est défini par un rapport de puissance de signaux
Ces signaux sont des signaux de télécommunications, ie aléatoires

- ⇒ Le PR est un paramètre de télécommunications
- ⇒ On le modélise comme une variable aléatoire

Le calcul du PR est influencé par :

| | |
|---------------------------|--|
| Facteurs mathématiques : | Temps d'intégration Approches méthodologiques |
| Facteurs technologiques : | Suréchantillonnage Filtrage Mapping Modulation (mono ou multiporteuses) Bande de base / fréquence porteuse |

Facteurs mathématiques

- Temps d'intégration

Le calcul du PR repose sur le calcul d'un maximum absolu

Ce maximum absolu se calcule sur un temps infini

Il est des cas où ce maximum absolu ne peut être atteint pratiquement

On procède en calculant ce PR (minoré) sur un temps fini

- Approches méthodologiques

On peut calculer « brutalement » le PR : très difficile, voire impossible

On peut majorer le PR : plus facile, peu précis

On peut estimer la fonction de répartition : plus adapté mais difficile

Facteurs technologiques

- Mapping

Les modulations numériques MAQ sont à enveloppe non constante

Les modulations FSK sont à enveloppe constante (GMSK)

Le PR est fortement influencé par l'association bit \leftrightarrow symbole

Attention : le PAPR d'une QPSK ne vaut toujours pas 0 dB !!

- Mono ou multiporteuse

Historique des études du PR : transmissions satellites en monoporteuses

Cas le plus étudié (« le plus classique ») : celui de l'OFDM

- Bande de base ou radio fréquence

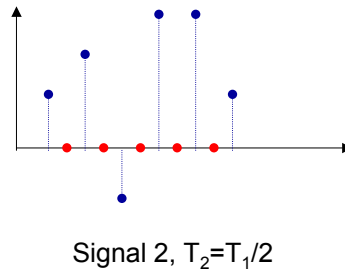
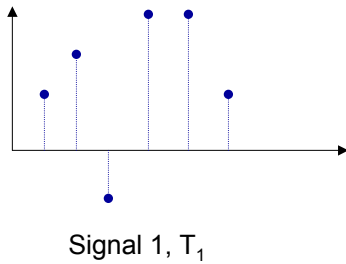
Le signal amplifié est un signal RF

La transmission sur fréquence porteuse modifie la valeur maximale

Facteurs technologiques

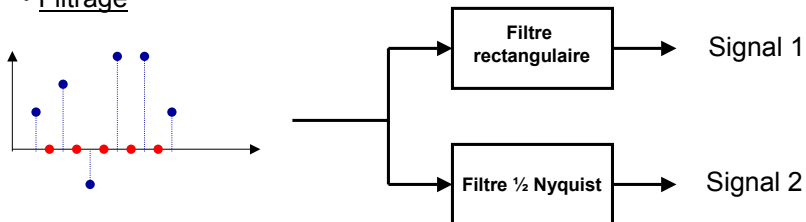
 • Suréchantillonnage

Exemple d'un suréchantillonnage d'un facteur 2



$$PR_1 \neq PR_2$$

Facteurs technologiques

 • Filtrage


$$PR_1 \neq PR_2$$

Les filtres de Nyquist génèrent des fluctuations au delà du temps symbole
 Ces fluctuations créent des pics « destructeurs » et « constructeurs »
 Des remontées du PR sont à prévoir

Facteurs influents (6/6)

INSTITUT D'ÉLECTRONIQUE ET DE TÉLÉCOMMUNICATIONS DE RENNES

$s_e(n) = \sum_k b_k \delta(n - kT)$

Mapping → $\uparrow M$ → Filtrage → Mono / Multi → $\otimes f_0$ → Amplificateur

PR_1 PR_2 PR_3 PR_4 PR_5

Le PR en entrée de l'amplificateur dépend des blocs d'émission
Ce système peut être vu comme un système entrée / sortie

↓

$s_e(n) = \sum_k b_k \delta(n - kT)$

Variable aléatoire d'entrée

CHAÎNE D'ÉMISSION

Variable aléatoire de sortie : PR

UMR 6164

Contenu de la présentation

INSTITUT D'ÉLECTRONIQUE ET DE TÉLÉCOMMUNICATIONS DE RENNES

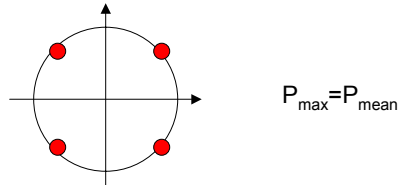
1. Positionnement du problème
2. Définitions du PAPR et dérivées
3. Facteurs influents
4. **Caractérisations en modulations monoporteuses**
5. Caractérisations en modulations multiporteuses
6. Méthodes de traitement des non linéarités
7. Conclusions et travaux en cours

UMR 6164

- Première étude : influence du suréchantillonnage
(Palicot, Louët, soumission EUSIPCO 05)

Hypothèse : modulation QPSK

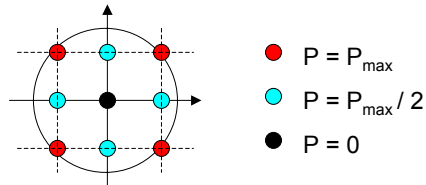
Cas trivial : à F_s , le $PR_{s,i}$ vaut 0 dB
Ce cas particulier ne traduit pas la réalité



$$P_{\max} = P_{\text{mean}}$$

Objectif : trouver le $PR_{s,i}$ pour un facteur de suréchantillonnage de N

Première étape : $F = 2F_s$



- $P = P_{\max}$
- $P = P_{\max} / 2$
- $P = 0$

Pendant une demie période, on se situe à P_{\max}
Pendant l'autre demie période, on se situe à mi chemin entre deux symboles :

- une chance sur 4 que les symboles soient les mêmes
- une chance sur 2 que les symboles soient voisins (on passe par $P_{\max}/2$)
- une chance sur 4 que les symboles soient diamétralement opposés (passage par 0)

$$P_{\text{moyenne}} = \frac{P_{\max}}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{P_{\max}}{4} + \frac{P_{\max}}{2 \times 2} + \frac{0}{4} \right)$$

- Pour $F = 2F_s$ (QPSK)

$$PR_{s,i} = 1,25 \text{ dB}$$

- Généralisation pour $F = NF_s$
Raisonnement par récurrence :

On obtient :
$$P_{\text{moyenne}} = \frac{1+2N^2}{3N^2} P_{\text{max}}$$

Et pour N infini,

$$PR_{\text{lim}} = 1,76 \text{ dB}$$

C'est la valeur limite du PR en QPSK non filtré

C'est une sous estimation du PR filtré => prise en compte du filtre

- Deuxième étude : influence du filtrage
(Palicot, Louët, soumission EUSIPCO 05)

Hypothèse : filtrage de Nyquist, modulation BPSK, QPSK

$$\left\{ \begin{array}{l} s(t) = \sum_{k=0}^{N-1} C_k p(t - kT) \\ p(t) = \frac{\sin(\frac{\pi t}{T_s}) \cos(\frac{\pi \beta t}{T_s})}{\frac{\pi t}{T_s} \left(1 - \frac{4\beta^2 t^2}{T_s^2} \right)} \end{array} \right.$$

Le calcul du PR nécessite le calcul de :

- la puissance moyenne de $s(t)$
- l'identification du maximum de $s^2(t)$

- En BPSK $P_{\text{moyenne}} = \sigma_c^2 \left(1 - \frac{\beta}{4}\right)$

- Calcul de la puissance maximale

$$\begin{aligned} \beta &= 0 \\ t &= -T_s/2 \\ a_k &= (-1)^k \end{aligned} \Rightarrow s(t = \frac{-T_s}{2}) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{1+2k} \Rightarrow \text{La série est divergente}$$

$$\text{PR}_{c,i} \{s(t), \beta = 0\} = +\infty$$

- $\beta \neq 0$

On montre aisément que la série converge \Rightarrow le PR existe
Inégalité de Schwartz,

$$|s(t)|^2 \leq \underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{T_s}(t-k)\right)}{\frac{\pi}{T_s}(t-k)} \right]^2}_{\text{terme} \leq 1 (\cong 1)} \underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{T_s}(t-k)\right)}{1 - 4 \left[\frac{\beta}{T_s}(t-k) \right]^2} \right]^2}_{\text{Étude de la somme de la série}}$$

Simplification d'écriture : $T_s = 1$

On pose :

$$\phi(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{\cos(\pi\beta(t-k))}{1-4\beta^2(t-k)^2} \right]^2$$

On montre que $\phi(t)$ présente un maximum pour $t = N/2$

On en déduit que

$$\phi\left(t = \frac{N}{2}\right) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{N/2} \left[\frac{\cos(\pi\beta k)}{1-4\beta^2 k^2} \right]^2$$

Par Taylor-Mac Laurin :

$$\sum_{k=1}^{N/2} \left[\frac{\cos(\pi\beta k)}{1-4\beta^2 k^2} \right]^2 = \int_0^{N/2} \left[\frac{\cos(\pi\beta t)}{1-4\beta^2 t^2} \right]^2 dt - \frac{1}{2}$$

Reste à identifier l'intégrale

Application du théorème des résidus :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{N/2} \left[\frac{\cos(\pi\beta t)}{1-4\beta^2 t^2} \right]^2 dt = \frac{\pi^2}{16\beta}$$

Conclusion :

$$\text{PR}_{\text{c,i}}\{s(t), \beta \neq 0\} \leq \frac{\pi^2}{8\beta(1-\frac{\beta}{4})}$$

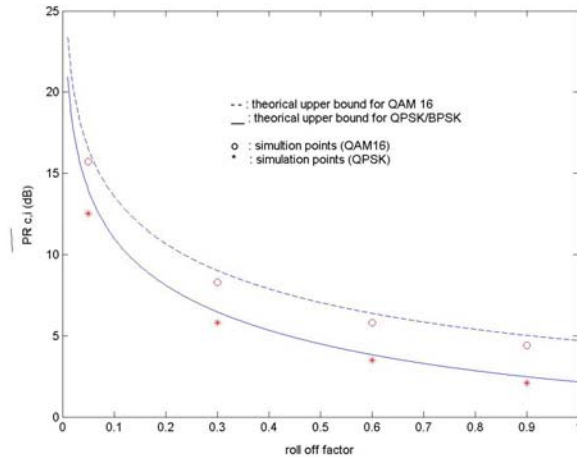
En BPSK

Généralisation :

$$\text{PR}_{\text{c,i}}\{s(t), \beta \neq 0\} \leq \left[\frac{\text{Max}(a_k)}{\sigma_a} \right]^2 \frac{\pi^2}{8\beta(1-\frac{\beta}{4})}$$

En QAM

Comparaisons théorie / simulations du PR en monoporteuses avec filtrage de Nyquist



1. Positionnement du problème
2. Définitions du PAPR et dérivées
3. Facteurs influents
4. Caractérisations en modulations monoporteuses
5. **Caractérisations en modulations multiporteuses**
6. Méthodes de traitement des non linéarités
7. Conclusions et travaux en cours

• Introduction

L'OFDM est (presque toujours) associée au problème du PR

PR : argument contre l'OFDM

En fait, c'est l'association PR/amplificateur qui pose le problème des non linéarités

Les études portant sur le PR en OFDM sont doubles :

- caractérisation mathématique du PR
- développements de méthodes pour le problème des non linéarités

• Signal OFDM

$$s(t) = \text{Re} \left[\sum_{k=0}^{N-1} C_k e^{2j\pi \frac{kt}{T}} \right]$$

somme aléatoire de signaux de phases différentes

=> amplitudes fluctuantes et PR élevé

1. Fonction de répartition

On montre que le majorant absolu du PR en OFDM est N (nb de porteuses)

Beaucoup (trop) de publications en déduire que le PR vaut N

Cette valeur n'est cependant presque jamais atteinte :

Exemple : IEEE 802.11.a (Hiperlan 2)

N=58, modulation QPSK, la probabilité que le PR vaille N est 4^{-56} !!!!

Pour $T=3.2 \mu\text{s}$, cette valeur arrive une fois toutes les $5.2 \cdot 10^{20}$ années !!!!

- ⇒ On doit décrire le PR de façon plus fine
- ⇒ Cela se fera à l'aide des fonctions de répartition du PR, ie trouver

$\text{Pr} [\text{PR} > \gamma_0]$ en fonction de γ_0 .

Exemples de fonctions de répartition

$$\Pr\{PR \geq \gamma\} \approx 1 - (1 - e^{-\gamma})^N \quad (\text{Van Nee, 1998})$$

$$\Pr\{PR \geq \gamma\} \approx \begin{cases} 1 - (1 - \frac{\sqrt{\gamma}e^{-\gamma}}{\sqrt{\bar{\gamma}}e^{-\bar{\gamma}}})^{\sqrt{\frac{\pi}{3}}N\sqrt{\bar{\gamma}}e^{-\bar{\gamma}}} & \gamma > \bar{\gamma} \\ 1 & \gamma \leq \bar{\gamma} \end{cases} \quad (\text{Imai, 2001})$$

$$\Pr\{PR \geq \gamma\} \approx kNe^{-\gamma(1-\frac{\pi}{k})} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \frac{\pi}{k}(1 - \frac{\pi}{k}) = \frac{1}{\gamma} \\ k > \pi \end{cases} \quad (\text{Sharif, 2001})$$

$$\Pr\{PR \geq \gamma\} \approx \sqrt{\frac{\pi}{3}}N\sqrt{\gamma}e^{-\gamma} \quad (\text{Zhou, 2002})$$

Pour γ fixé, si N augmente, $\Pr\{PR > \gamma\}$ augmente

(N : nombre de porteuses)

2. Densité de probabilité

- A partir la fonction de répartition, on déduit la densité de probabilité :

$$f_{PR}(\gamma) = \frac{d}{d\gamma} \Pr(PR \leq \gamma)$$

- A partir de la densité de probabilité, on déduit les moments d'ordre k du PR :

moment d'ordre 1 : moyenne

moment d'ordre 2 : variance

- Exemple : $\Pr\{PR \leq \gamma\} \approx (1 - e^{-\gamma})^N$

$$\Rightarrow f_{PR}(\gamma) = Ne^{-\gamma}(1 - e^{-\gamma})^{N-1}$$

Dans le cas où l'on considère : $\Pr\{PR \leq \gamma\} \approx (1 - e^{-\gamma})^N$

$$\begin{cases} E\{\gamma\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma f_{PR}(\gamma) d\gamma \approx c_{Euler} + \ln N \\ c_{Euler} \approx 0.5772 \end{cases}$$

Moyenne du PR en OFDM

$$E\{\gamma^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma^2 f_{PR}(\gamma) d\gamma \approx \frac{\pi^2}{6}$$

(valable pour N assez grand)

Variance du PR en OFDM

[Ochiai et Imai, 1998]

3. Exemple

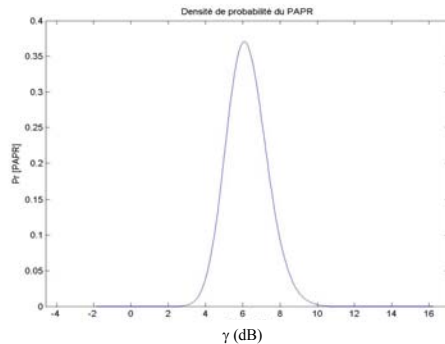
$$\Pr\{PR \leq \gamma\} \approx (1 - e^{-\gamma})^N$$

$$N=58$$

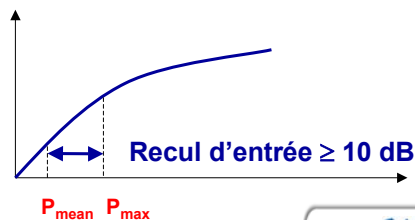
$$E\{\gamma\} \approx 6.6 \text{ dB}$$

$$E\{\gamma^2\} \approx 2.1 \text{ dB}$$

Pr [PR > 10 dB] ≈ 0
=> dimensionne le recul d'entrée



Conséquences :



[Lien](#)

1. Positionnement du problème
2. Définitions du PAPR et dérivées
3. Facteurs influents
4. Caractérisations en modulations monoporteuses
5. Caractérisations en modulations multiporteuses
- 6. Méthodes de traitement des non linéarités**
7. Conclusions et travaux en cours

1. Approche générale

Le problème : un signal à fort PR + non linéarité = perturbations

Facteurs sur lesquels on peut agir :

- PR du signal d'entrée (pour le diminuer)
- Élément non linéaire (amplificateur) et/ou signaux d'entrée/sortie
- Émission ou réception

- chaque méthode est adaptée à un cas particulier
- facteurs à prendre en compte :
 - Nombre de porteuses
 - Complexité
 - Réduction des distorsions
 - Notion de compatibilité descendante
 - ...

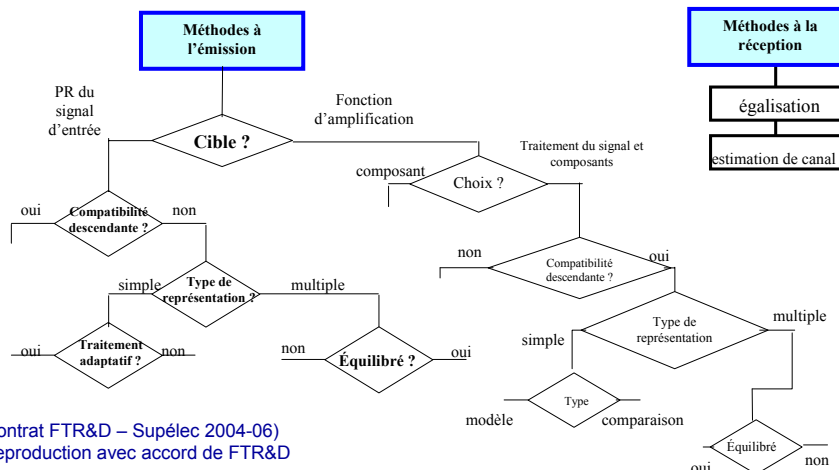
Le problème : un signal à fort PR + non linéarité = perturbations

Facteurs sur lesquels on peut agir :

- PR du signal d'entrée (pour le diminuer)
- Élément non linéaire (amplificateur) et/ou signaux d'entrée/sortie
- Émission ou réception

- chaque méthode est adaptée à un cas particulier
- Il existe une quantité énorme de méthodes
- facteurs à prendre en compte :
 - Nombre de porteuses
 - Complexité
 - Réduction des distorsions
 - Notion de compatibilité descendante
 - ...

2. Classification synthétique des méthodes



(contrat FTR&D – Supélec 2004-06)
Reproduction avec accord de FTR&D

1. Positionnement du problème
2. Définitions du PAPR et dérivées
3. Facteurs influents
4. Caractérisations en modulations monoporteuses
5. Caractérisations en modulations multiporteuses
6. Méthodes de traitement des non linéarités
7. **Conclusions et travaux en cours**

Le problème du PR reste toujours d'actualité
Aucune méthode ne permet aujourd'hui de le résoudre complètement

L'OFDM concentre (presque) toutes les études
L'évolution des communications numériques repose le problème du PR :

- dans le cadre du MIMO
- dans le cadre de la radio logicielle

Travaux sur ce sujet depuis 1997 à Supélec-Rennes/SCEE

- 2 thèses passées
- 2 thèses en cours
- 8 communications internationales
- 1 communication revue
- 2 contrats industriels

Travaux en cours sur l'expression du PR à SCEE :

- PR dans un cas MIMO
- PR dans le cas de la radio logicielle
- PR en monoporteuse avec filtrage en racine de Nyquist
- Effets du filtrage sur le PR (relation entrée/sortie)
- expression des moments d'ordre k et validation (moyenne et variance)
(à partir de la relation de Zhou)

Travaux sur les méthodes :

- cas MIMO
- cas radio logicielle

Yves LOUËT
IETR / Supélec, Campus de Rennes
Équipe SCEE

Yves.Louet@rennes.supelec.fr
02.99.84.45.34