Égalisation à retour de décision pondérée

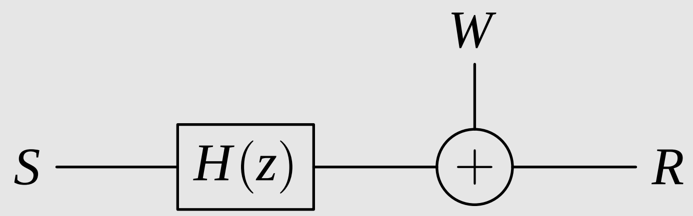
29 janvier 2004

Alban GOUPIL

Objectifs

- Égaliseur aveugle performant
  - Converge même en environnement difficile
  - Pour les modulations à forte efficacité spectrale (MAQ)
  - Proche de l'ERD entraîné en régime de poursuite
- Structure unique tout au long de la convergence
  - Simplicité de mise en œuvre
  - Simplicité des algorithmes d'adaptation

Modèle du canal



- Source S composée de symboles i.i.d. issus de l'alphabet $\mathscr{A}$ de la constellation et de variance unité
- Bruit W blanc additif gaussien indépendant de la source
- Filtre H du canal à réponse impulsionnelle finie et invariant dans le temps

Plan de l’exposé

Mélange

Généralité → ERDP

Présentation et étude

Mélange de structures

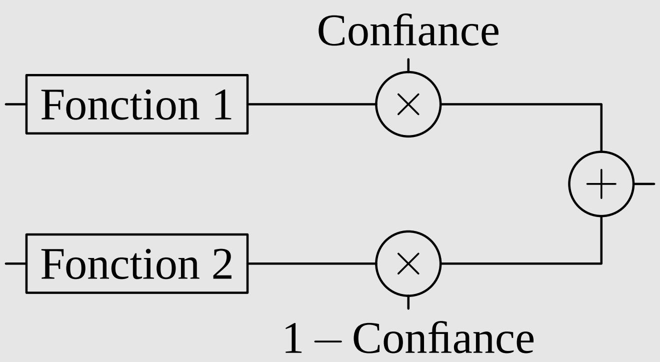
Mélange d’algorithmes → Aveugle/Bussgang

CMA et généralisation : CNA

Proportion et confiance

ERDP aveugle

Angle d'approche : le mélange

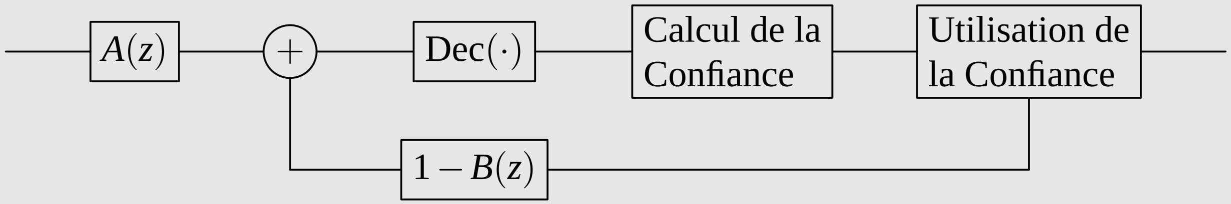


- Récupérer les avantages de plusieurs fonctions
  - Algorithmes
  - Structures
- Pas de commutation $\Longrightarrow$
  - La transition est douce
  - Pas de phénomène d'hysteresis
- Confiance $=$ Proportion, entre 0 et 1, du mélange $\Longrightarrow$ indique la fonction prépondérante

Exemple de mélange : l'ERDP

- Égaliseur à retour de décision pondérée est une amélioration de l'ERD pour
  - Combattre la propagation des erreurs
  - Meilleure adaptation en cas de mauvaise décision
- Simplicité :
  - Structure de l'ERD peu modifiée
  - La non linéarité reste confinée en fin de structure

Structure de l'ERDP



L'ERDP est un ERD munis de deux nouvelles fonctions :

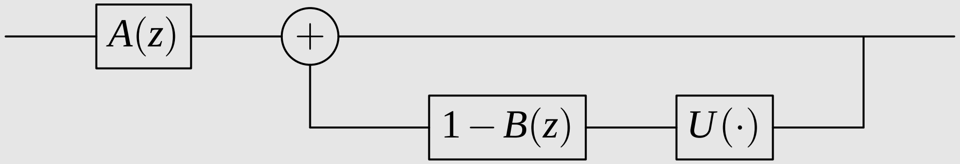
- Le calcul de la confiance γ_k, compris entre 0 et 1 qui mesure la pertinence de la sortie z_k de l'égaliseur
- L'utilisation de la confiance
  - Pour le filtrage :

$$\tilde{z}_k = (1 - \gamma_k)\, z_k + \gamma_k\, \hat{z}_k$$

  - Pour l'adaptation :

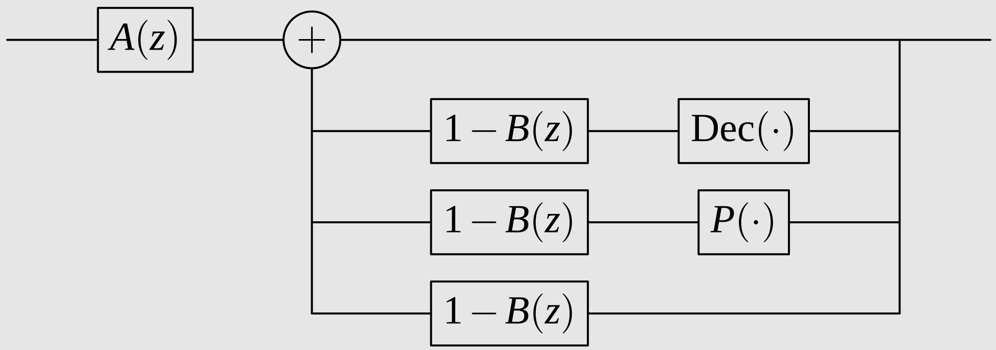
$$\mathbf{F}_{k+1} = \mathbf{F}_k - \mu\, \gamma_k\, (z_k - \hat{z}_k)\, \overline{\mathbf{X}_k}$$

Structures équivalentes 1/3



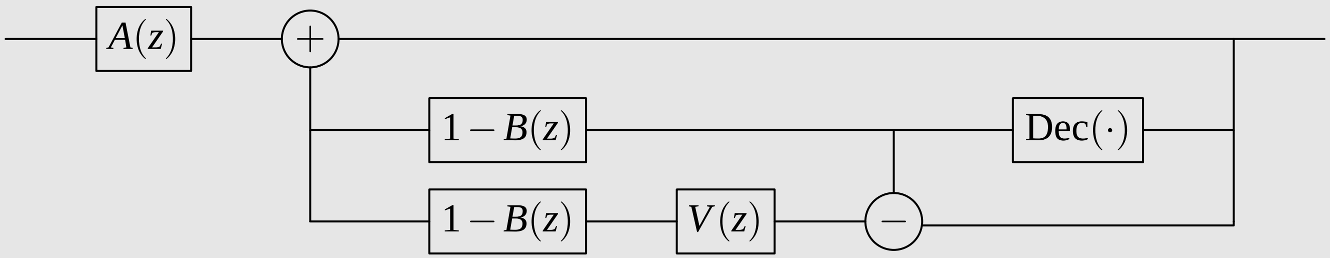
- Pour le filtrage l'ERDP est identique à un ERD classique avec une fonction de décision différente. Cette simplification est possible grâce aux :
  - caractère local de la confiance
  - calcul de la confiance sans phénomène de mémoire
- Cette structure est utile et simple pour l'étude de l'ERDP

Structures équivalentes 2/3



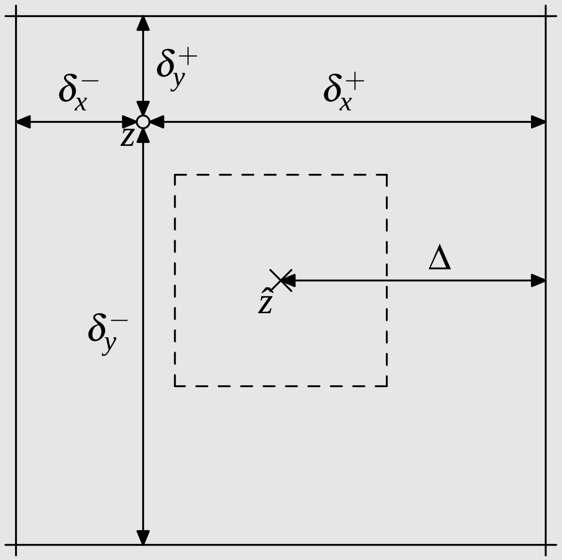
- L'ERDP peut être vu comme la mise en parallèle d'un ERD classique et un égaliseur linéaire récursif (ELR)
- La sélection de la structure adéquate est faite, symbole par symbole, par le filtrage non linéaire de la branche $P(\cdot)$
  - $P(\cdot) = -\mathrm{dec}(\cdot) \Longrightarrow$ ELR
  - $P(\cdot) = -\mathrm{id}(\cdot) \Longrightarrow$ ERD
- Cette structure permet de voir facilement les fonctions mélangées par l'ERDP

Structures équivalentes 3/3



- L'ERDP est un ERD en parallèle avec un filtrage des erreurs
- Cette structure montre comment l'ERDP tente de limiter la propagation des erreurs : en les filtrant par le filtre arrière précédé par une non linéarité $V(\cdot)$

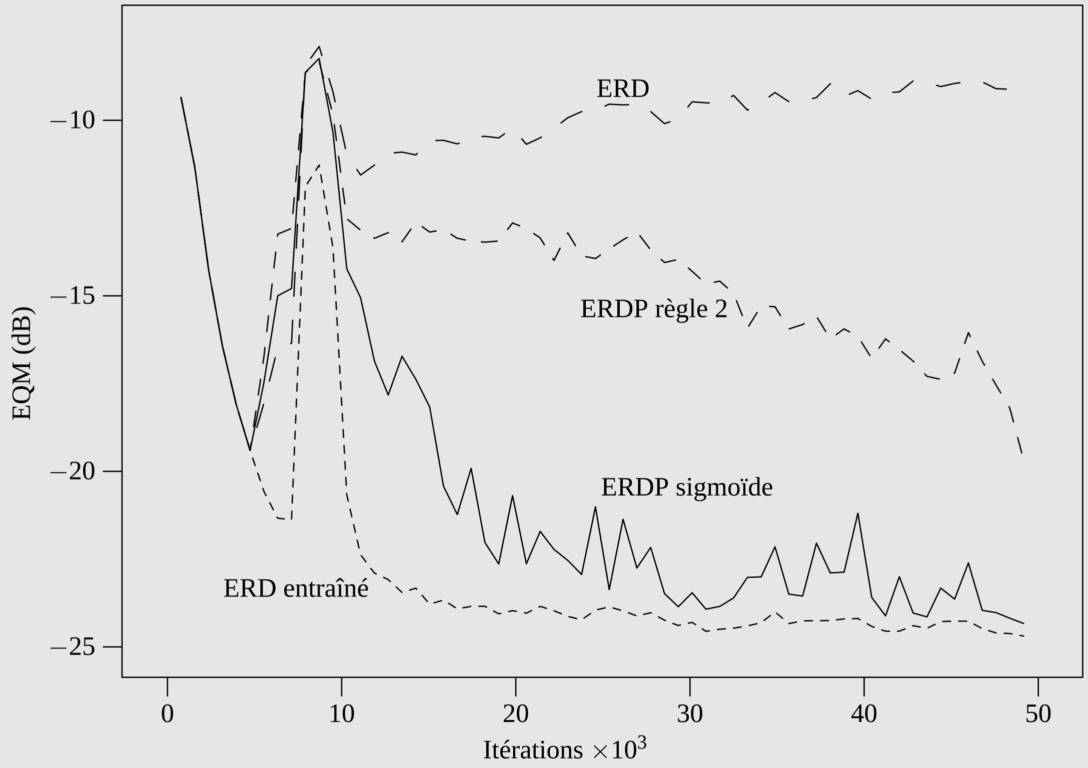
Calcul de la confiance



$$\gamma = 1 - \frac{\|z - \hat{z}\|_\infty}{\Delta}$$
$$= \frac{\min\left(\delta_x^-, \delta_x^+, \delta_y^-, \delta_y^+\right)}{\Delta}$$

- Le domaine représente le domaine de décision d'une MAQ
- Améliorations possibles : prise en compte de la spécificité des symboles au bord de la constellation, décomposition de la confiance sur les voies I et Q, modification de la confiance par une fonction du type sigmoïde, confiance hiérarchique

Performances des ERDP



Canal de Macchi en MAQ-64 pour un RSB de 30 dB avec un saut de bruit entre le 8 000 et le 10 000-ème symbole. Tous les égaliseurs sont entraînés jusqu'au 5 000-ème symbole.

Comparaison ERDP/ERD

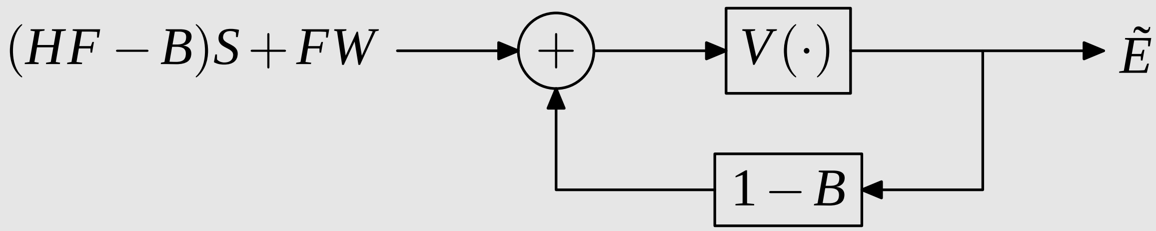
- Nécessité d'un modèle des erreurs valable pour les ERD(P) $\Longrightarrow$ comparaison du filtrage
- Calcul à partir du modèle des paramètres descriptifs des ERD(P) permettant de mesurer les apports de l'ERDP
  - Probabilité d'erreur
  - Temps de récupération
  - Distribution des salves d'erreurs
  - Autres statistiques (EQM, . . .)
- Trois types d'erreurs :

$E = Z - S$ Erreur de sortie (EQM,. . .)

$\hat{E} = \hat{Z} - S$ Erreur de décision (probabilité d'erreur,. . .)

$\tilde{E} = \tilde{Z} - S$ Erreur de décision douce (modélisation,. . .)

Modélisation des erreurs 1/5



- Les sorties de l'ERD(P) dépendent de :
  - La source S et du bruit W
  - La mémoire du filtre arrière
  - Les coefficients des filtres (supposés constants)
- Les erreurs de décision douce vérifient :

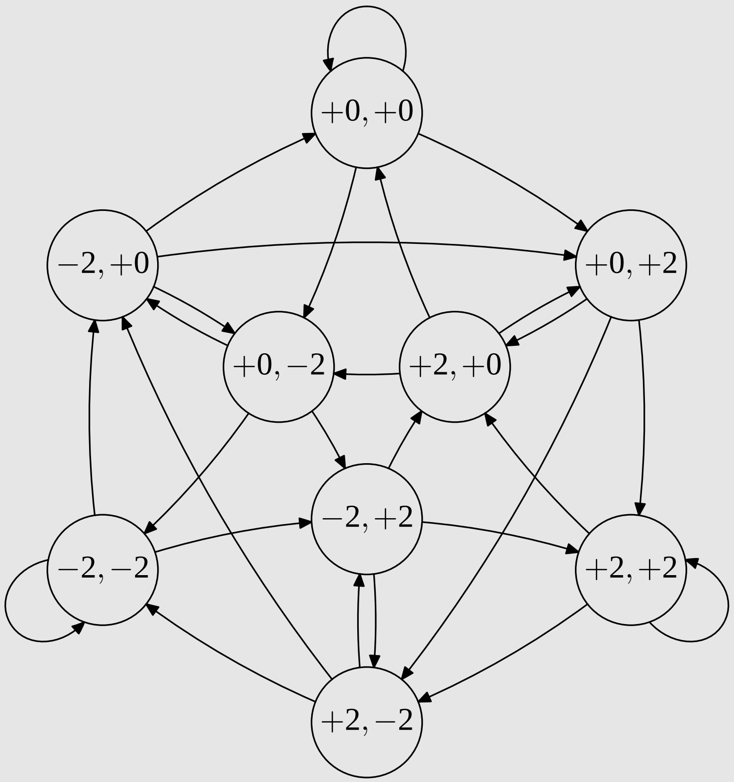
$$\tilde{E} = V\left(\underbrace{(HF-B)S+FW}_{\text{Bruit excitant}} + \underbrace{(1-B)\tilde{E}}_{\text{Effet mémoire}}\right)$$

Modélisation des erreurs 2/5

- Modélisation de $\tilde{E}$ par un processus de Markov fini à temps et à valeurs discrètes
- Pour l'ERDP, il est nécessaire de discrétiser la fonction de décision en l'approchant par une fonction en escalier
- L'étude de $\tilde{E}$ suffit car elle contient suffisamment d'information pour connaître les statistiques de E et de $\hat{E}$:

$$
\begin{tikzcd}
 & E \arrow[dl, bend left] \arrow[dr] & \\
\tilde{E} \arrow[ur, bend left] \arrow[rr] & & \hat{E}
\end{tikzcd}
$$

Modélisation des erreurs 3/5



Exemple de la chaîne de Markov des erreurs de décision pour un ERD dont le filtre arrière est de deux coefficients et pour une MDP-2. Les flèches représentent les transitions possibles.

Modélisation des erreurs 4/5

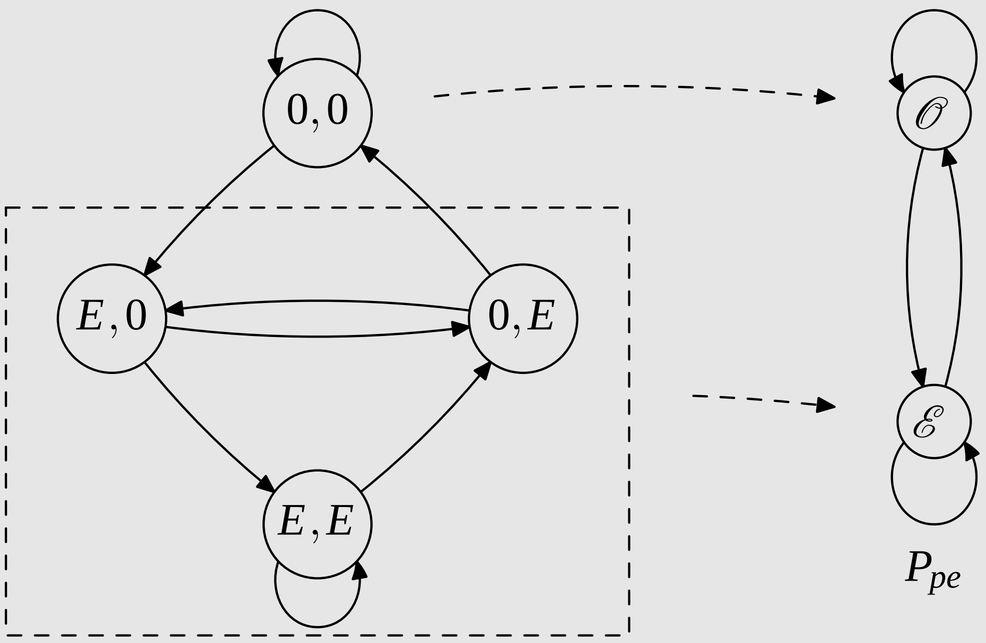
- $\underline{\mathbf{Q}}$ donne la matrice de transition qui est composée des probabilités d'aller d'un état à l'autre
- $\Pr\left[\tilde{\mathbf{E}}_k\right]$ est la probabilité d'être à l'instant k dans l'état $\tilde{\mathbf{E}}_k$. L'ensemble de ces probabilités donne le vecteur $\mathbf{P}_k$.
- Évolution des probabilités :

$$\mathbf{P}_k = \underline{\mathbf{Q}}\,\mathbf{P}_{k-1} = \underline{\mathbf{Q}}^k\,\mathbf{P}_0$$

- Régime stationnaire donné par le vecteur propre de $\underline{\mathbf{Q}}$ associé à la valeur propre 1 :

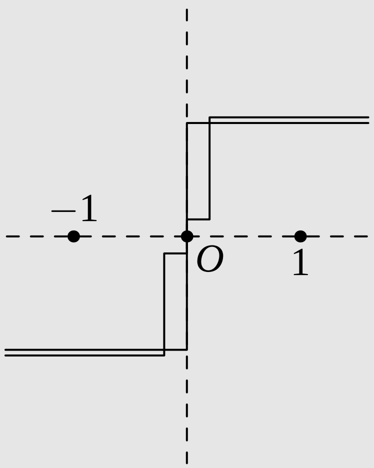
$$\mathbf{P}_\infty = \underline{\mathbf{Q}}\,\mathbf{P}_\infty$$

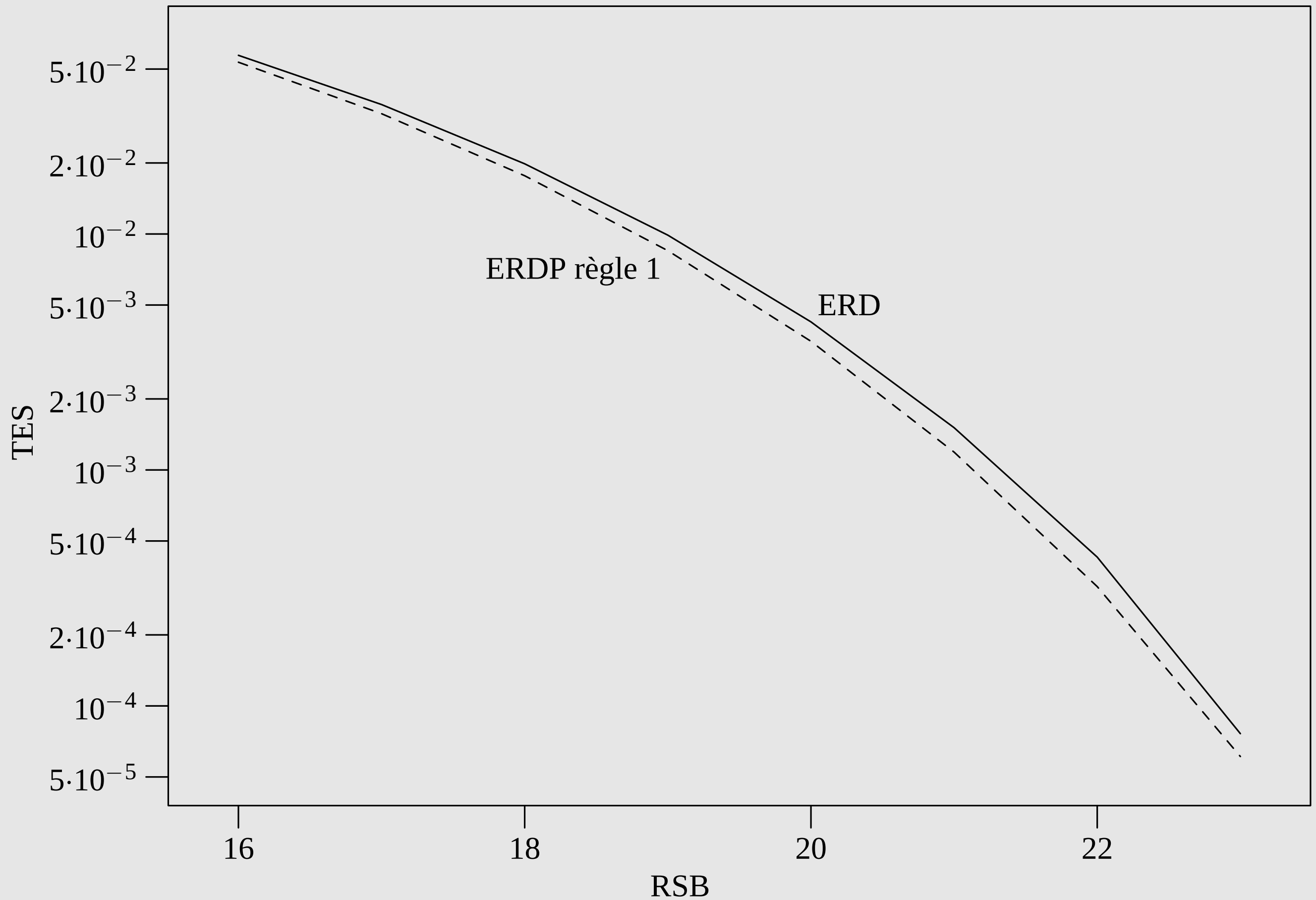
Modélisation des erreurs 5/5



- Comparaison entre l'ERD et l'ERDP n'est pas directe à partir de la chaîne de Markov $\Longrightarrow$ Réduction du nombre des états
- La réduction permet le calcul des paramètres descriptifs
- Exemple : P_{pe} d'après la réduction en exemple qui donne aussi, par conséquent, le temps de récupération

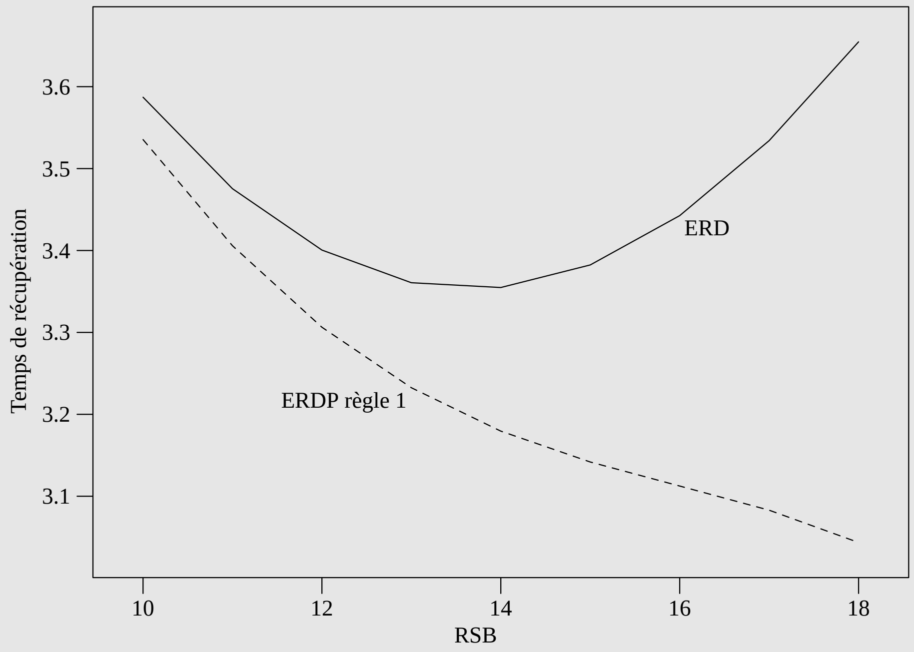
ERD(P) — Probabilité d’erreur

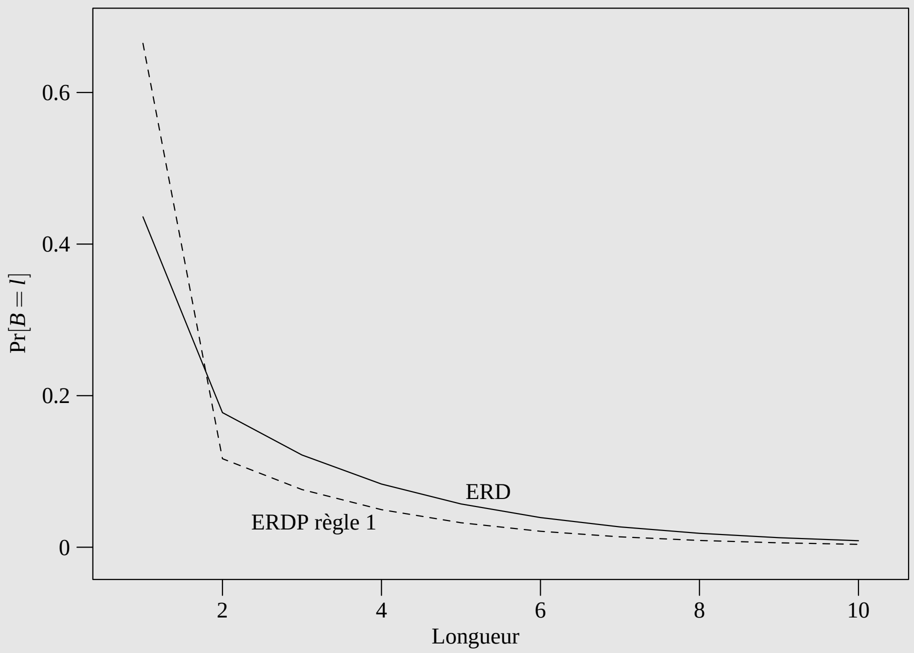




Canal : $[1;0{,}8]$. Modulation : MDA-4. Filtre arrière optimal pour le critère du ZF. Pas de filtre avant.

ERD(P) — Distribution des erreurs





Canal : $[1; 0{,}6; 0{,}1]$. Modulation : MDA-4. Filtre arrière optimal pour le critère du ZF. Pas de filtre avant. RSB : 19 dB pour salves d'erreurs.

Première conclusion

- L'ERDP est donc une solution simple au problème de la propagation des erreurs des ERD. En effet :
  - Il limite les dégâts causés par la propagation des erreurs
  - Il revient rapidement dans un état sans erreur
  - Il casse le processus des erreurs en évitant de longues salves d'erreurs
- L'ERDP montre que l'idée du mélange est bien adaptée à la récupération des avantages de deux fonctions (ERD et ELR)

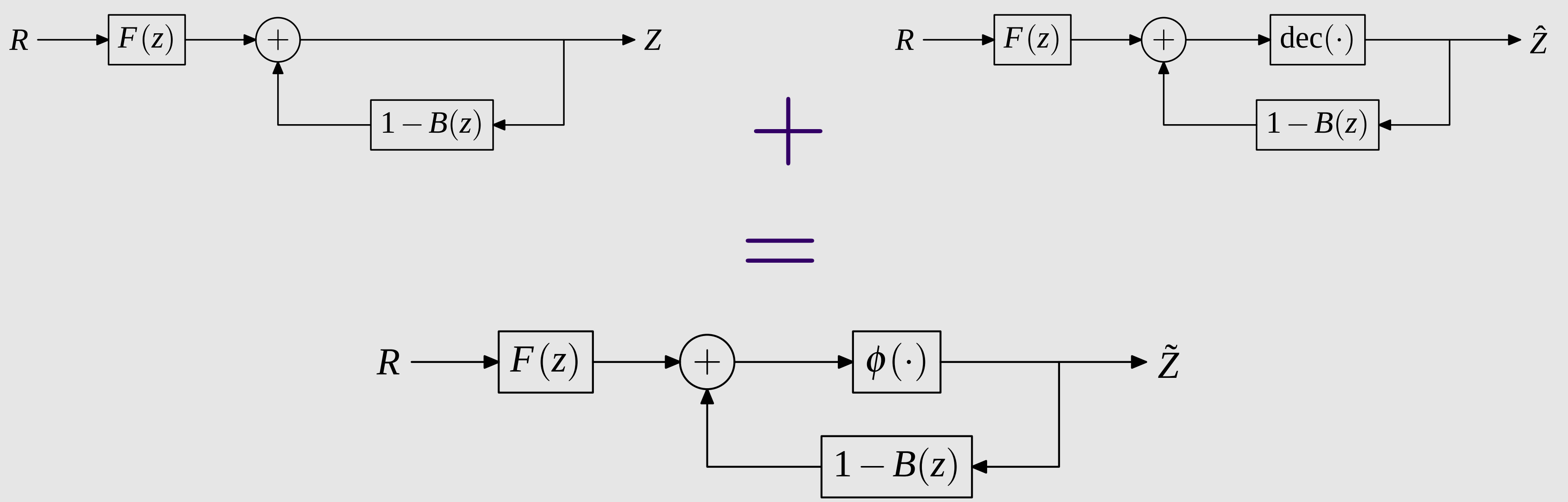
ERDP aveugle

- Utilisation de l'idée du mélange pour
  - L'algorithmique
  - La structure
- La proportion Υ du mélange est utile aussi bien à la structure qu'à l'algorithmique

Mélange de structures 1/3

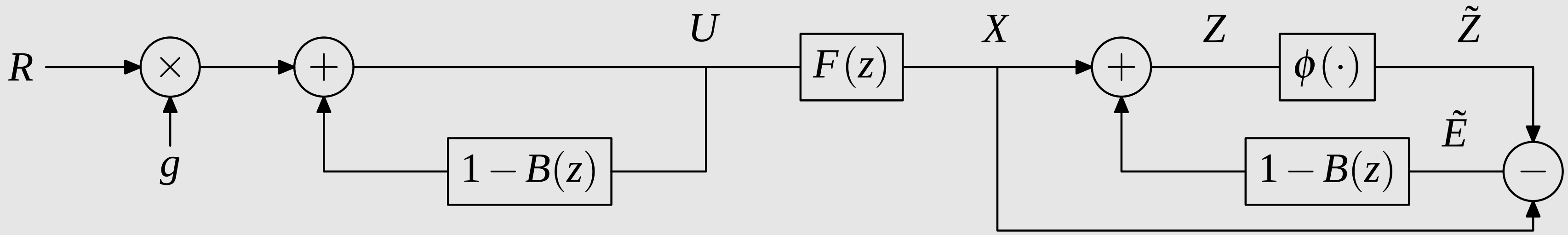
- Nous recherchons une structure permettant de mélanger les deux types d'égaliseurs suivants :
  - L'ELR : En phase d'adaptation ($\Upsilon \approx 0$) cette structure permet une adaptation simple et robuste
  - L'ERD : En phase de poursuite ($\Upsilon \approx 1$) l'ERD permet d'avoir de bonnes performances et l'algorithmique génère peu de bruit propre
- L'ERDP est une solution où la fonction de décision varie en fonction de la confiance globale Υ

Mélange de structures 2/3



$$\phi(z_k) = \Upsilon_k \operatorname{dec}(z_k) + (1 - \Upsilon_k)\, z_k$$

Mélange de structures 3/3



- Choix de la structure : ERDP mis sous la forme de Belfiore et Park
- Découpe de la structure de l'ERDP aveugle est donnée par la découpe de l'ERD optimal au sens du MEQM :
  - Filtre adapté + Filtre transverse. Dans le cas SIMO ces deux filtres sont séparables
  - Filtre blanchissant
  - Non linéarité de filtre identique au blanchisseur
  - Récupérateur de gain

Mélange d'algorithmes

Deux types d'adaptation :

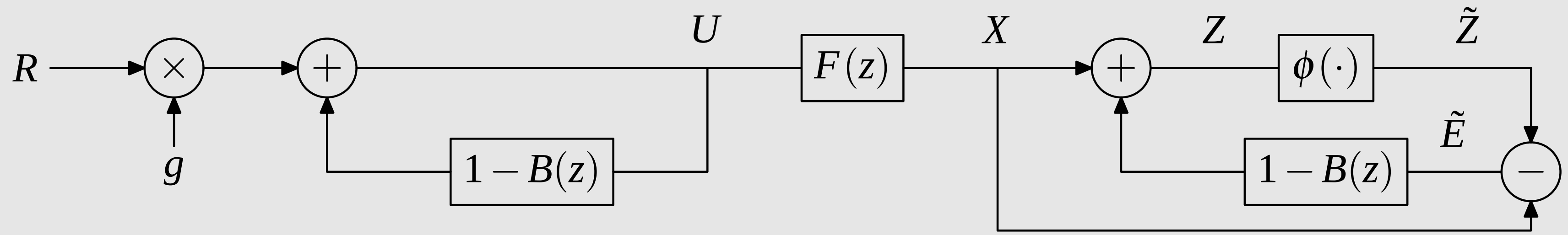
Locale Chaque module est adapté en fonction d'un critère propre. Intérêt : convergence plus rapide, robustesse en régime transitoire

Globale L'ensemble de l'égaliseur doit optimiser un critère globale comme le MEQM. Intérêt : meilleures performances en régime stationnaire

Le mélange permet d'avoir une adaptation locale lorsque l'égaliseur n'a pas encore ouvert suffisamment l'œil et l'adaptation globale lorsque les décisions sont suffisamment fiables. $J_{\mathsf{I}}(z)$: fonction de coût locale, $J_{\mathsf{DD}}(z)$ fonction de coût globale (dirigée par les décisions)

$$J = (1 - \Upsilon)\, J_{\mathsf{I}} + \Upsilon\, J_{\mathsf{DD}}$$

Adaptation de chaque module

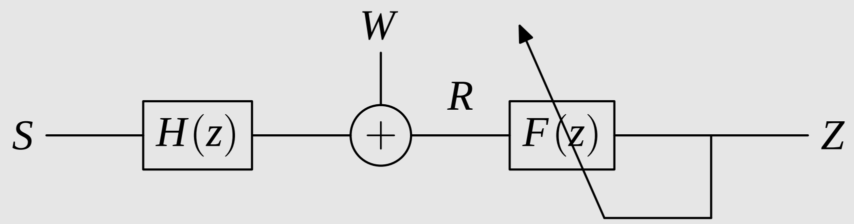


Filtre récursif En local, l'adaptation tente de blanchir sa sortie. Comme il s'agit du premier module, cette adaptation, rapide, permet d'améliorer la vitesse de convergence des autres fonctions

Gain Ne fonctionne qu'en local car sinon il ferait double emploi avec le filtre transverse. Il s'agit d'un seul coefficient qui tente de normaliser la puissance de son entrée à 1

Filtre transverse L'adaptation locale se fait par un algorithme de type Bussgang pour la facilité de mise en œuvre

Algorithmes Bussgang



Principe Optimiser le filtre $F(z)$ pour minimiser la fonction de coût $\mathscr{J}(Z)$ dépendante de la sortie

$$\mathscr{J}(Z) = \mathbb{E}\{J(Z)\}$$

Faisabilité Si $\mathscr{J}(Z)$ est bien choisie, le filtre peut converger sous certaines hypothèses vers un égaliseur qui ouvre l'œil

Adaptation Une simple descente du gradient stochastique permet l'optimisation de $F(z)$

$$\mathbf{F}_{k+1} = \mathbf{F}_k - \mu\,\phi(z_k)\,\overline{\mathbf{R}}_k \qquad \text{avec} \qquad \phi(Z) = J'(Z)$$

Constant Norm Algorithm (CNA)

CMA est très étudié en égalisation aveugle, et est particulièrement bien adapté aux modulations à module constant mais elle fonctionne aussi avec d'autres modulations comme les MAQ

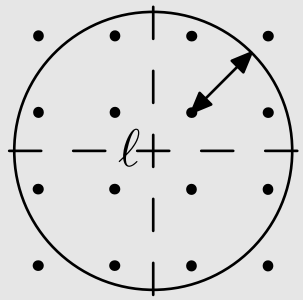
$$J(Z) = \left||Z|^2 - R\right|^2$$

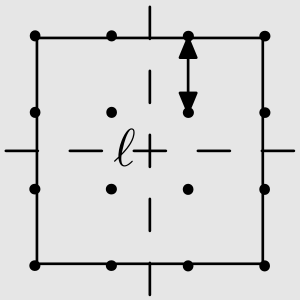
Problème du CMA Pour les modulations de type MAQ, le CMA a tendance à générer beaucoup de bruit propre qui peut nuire à la convergence des autres modules

Solution Il est possible de généraliser le CMA pour d'autres modulations en utilisant une norme $n(\cdot)$ différente du module qui donne la classe des CNA

$$J(Z) = \left|n^2(Z) - R\right|^2$$

Normes et modulations





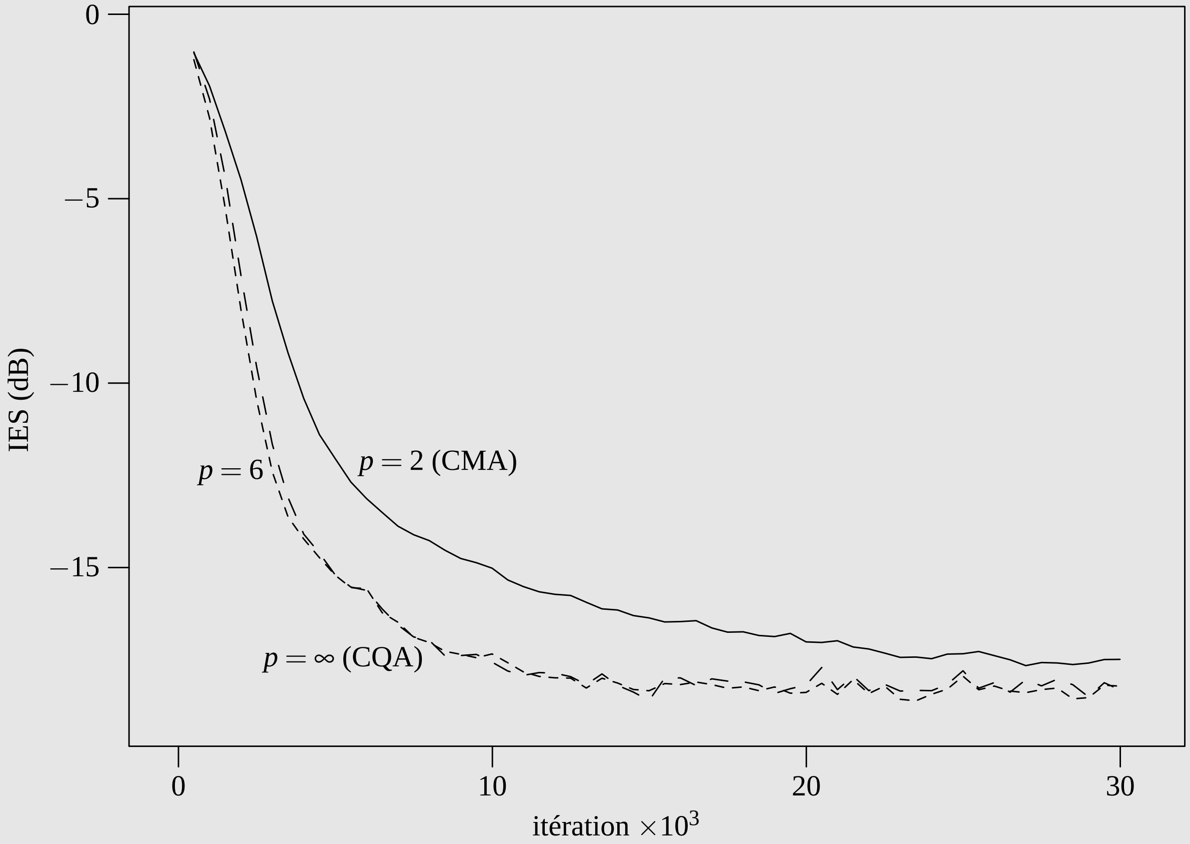
- Intuitivement, les modulations de type MAQ sont plus « carrées » que « rondes » $\Longrightarrow$ norme dont la boule est « carrée »
- La norme « carrée » est la norme infinie $\Longrightarrow$ CQA (Constant sQuare Algorithm) $\Longrightarrow$ Bruit propre plus faible

$$\|z\|_\infty = \max\big(|\mathrm{Re}\, z|, |\mathrm{Im}\, z|\big)$$

- D'autres normes sont possibles comme la norme-p

$$\|z\|_p = \sqrt[p]{(\mathrm{Re}\, z)^p + (\mathrm{Im}\, z)^p}$$

Performances des CNA



MAQ-16 sur le premier canal de Proakis pour un RSB de 40 dB. Le filtre transverse est composé de 61 coefficients initialisés à 0 sauf le coefficient central mis à 1.

Conclusion sur le CQA

Avantage du CQA Il permet de réduire le bruit propre de l'algorithme $\Longrightarrow$ Convergence plus rapide que le CMA pour un bruit résiduel équivalent. Ceci peut se montrer par le calcul de l'EQM résiduel des algorithmes

Inconvénient du CQA Il récupère la phase et est donc sensible à un résidu de porteuse $\Longrightarrow$ Possibilité de mélanger le CMA et le CQA pour limiter cet inconvénient $\Longrightarrow$ Le mélange se fait sur la norme : CDNA (Constant Dynamic Norm Algorithm)

$$\Downarrow$$

CQA : Bon candidat pour le filtre transverse de l'ERDP aveugle

Confiance de l'ERDP aveugle 1/2

Importance La confiance gère aussi bien les algorithmes que la structure. Elle est donc un paramètre important qui doit être choisi avec soin

Obtention La confiance est prise comme étant une fonction d'un autre critère $\hat{\mathscr{J}}$ qui mesurera la situation globale de l'égaliseur

$$\Upsilon = \psi\left(\hat{\mathscr{J}}\right)$$

Critère global Plusieurs choix sont possibles comme par exemple l'estimation de l'EQM basée sur les décisions. Le problème est qu'il sous-estime la véritable EQM, et n'est donc pas assez fiable

Confiance de l'ERDP aveugle 2/2

- L'égaliseur contient un filtre transverse optimisé localement par un algorithme de type Bussgang. Vu son emplacement, sa sortie mesure l'efficacité de l'ELR avant la non linéarité
- Une fonction de coût de type Bussgang mesure la « distance » entre l'égaliseur adapté et l'optimum

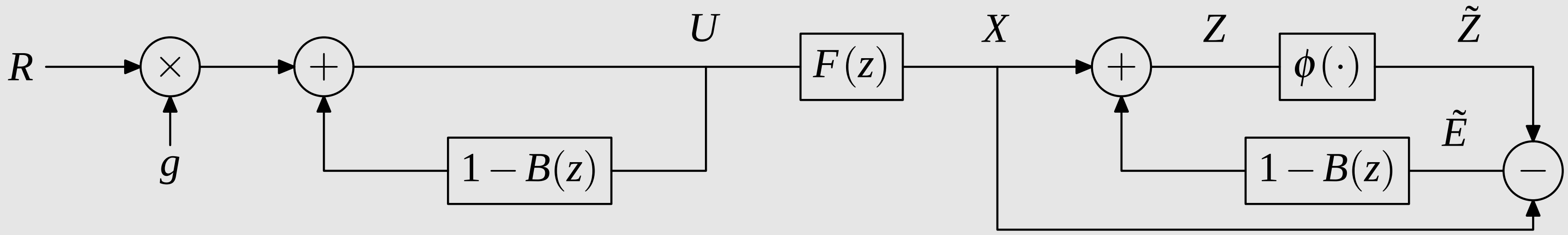
$$\Downarrow$$

Fonction de coût du CQA correspond à l'objectif

- Le critère global est l'estimation de la fonction de coût associée au filtre transverse

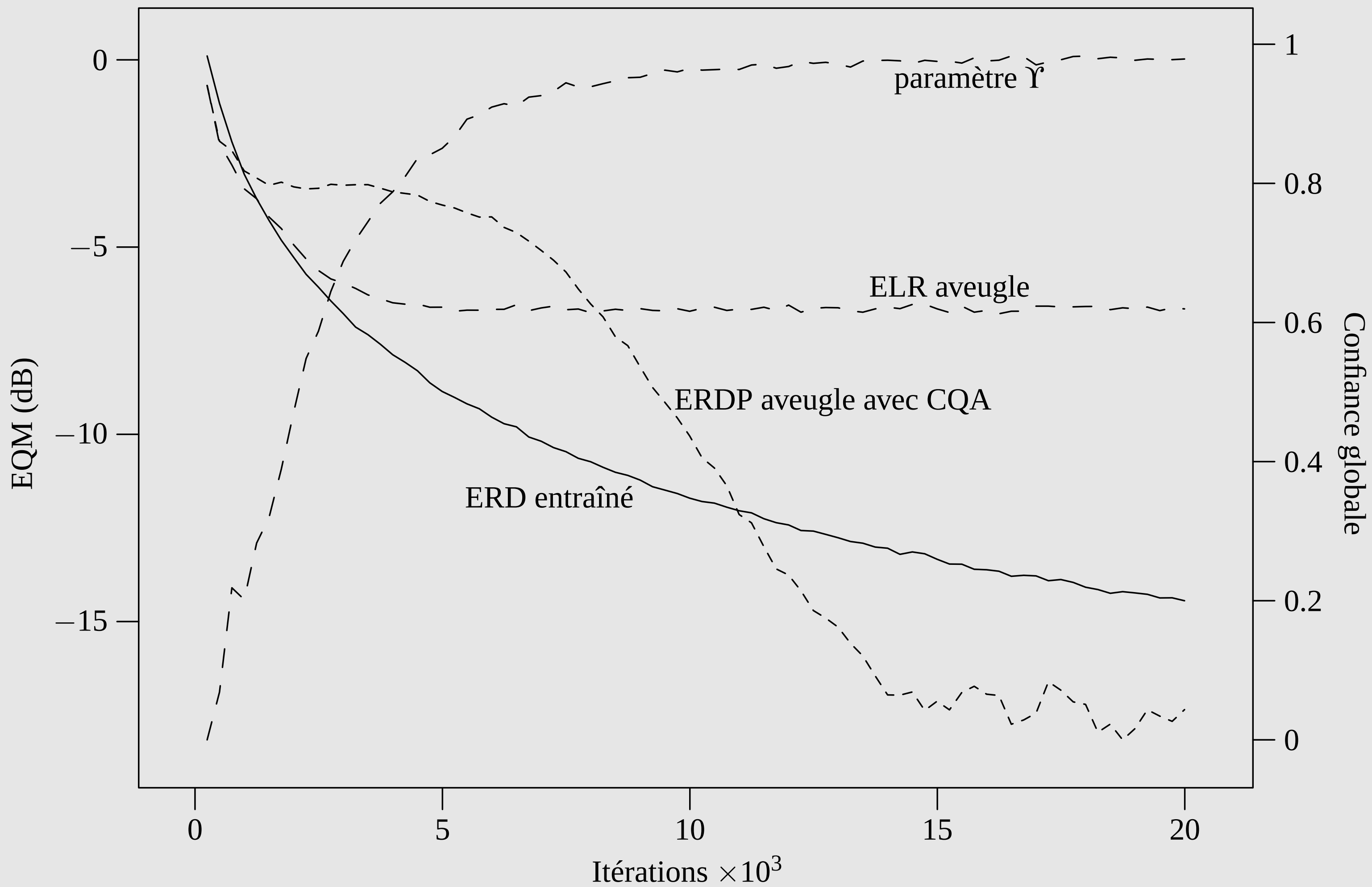
$$\hat{\mathscr{J}}_{k+1} = \lambda\ \hat{\mathscr{J}}_k + (1-\lambda)\left|\|x_k\|_\infty^2 - R\right|^2$$

Algorithme complet



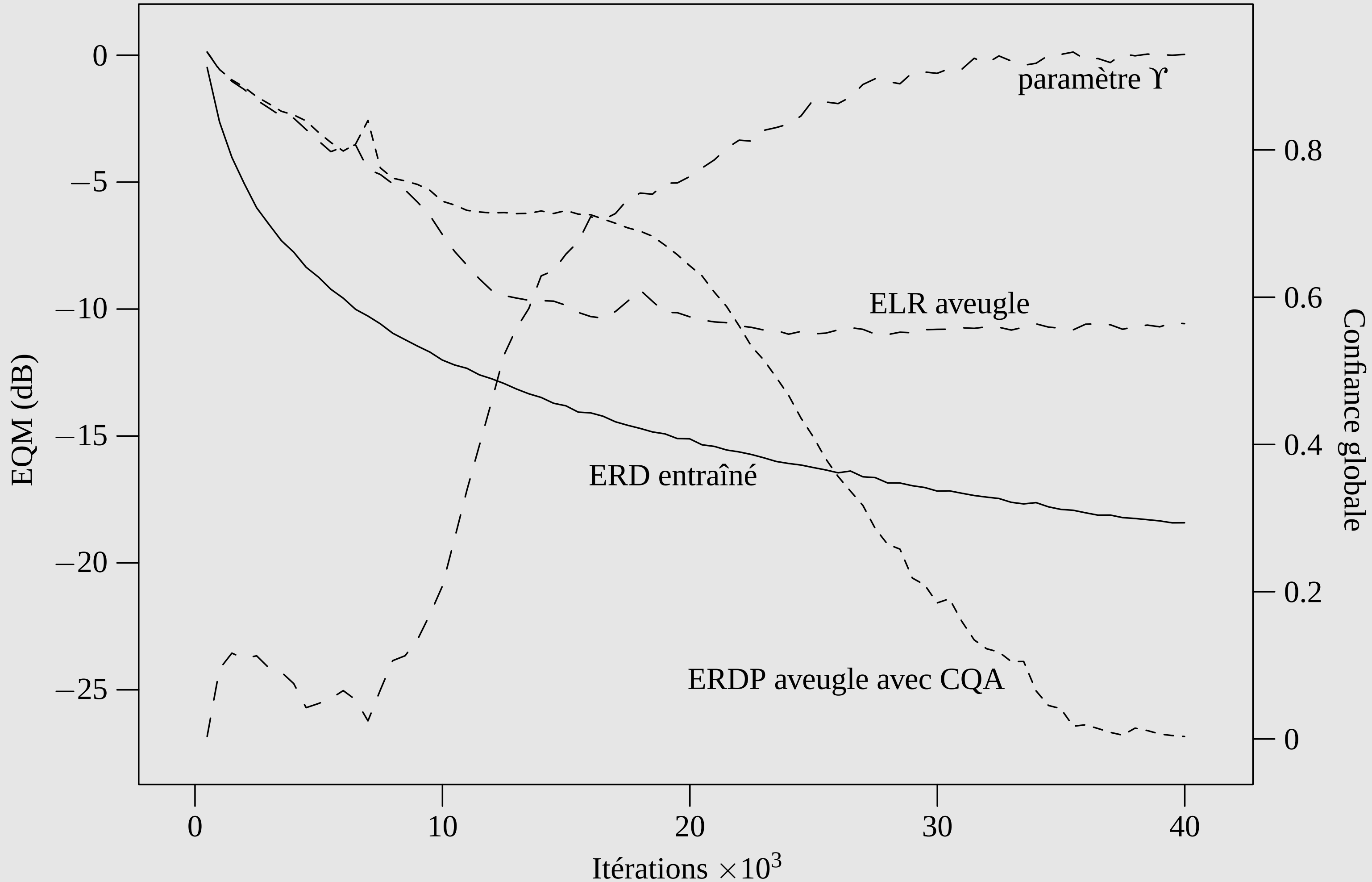
$u_k \leftarrow \sqrt{\lvert G \rvert}\, r_k - \mathbf{B}^T\, \mathbf{U}_{k-1:k-L_B}$	*Blanchiment et gain*
$x_k \leftarrow \mathbf{F}^T\, \mathbf{U}_{k:k-L_F+1}$	*Filtrage transverse*
$z_k \leftarrow x_k - \mathbf{B}^T\, \tilde{\mathbf{E}}_{k-1:k-L_B}$	*Sortie de l'égaliseur*
$\hat{z}_k \leftarrow \mathrm{dec}(z_k) \quad \hat{e}_k \leftarrow \hat{z}_k - z_k$	*Décision et erreur*
$\hat{\mathscr{J}} \leftarrow \lambda\, \hat{\mathscr{J}} + (1-\lambda)\left(\lVert x_k \rVert_p^2 - R\right)^2$	*Critère global*
$\Upsilon \leftarrow \psi(\hat{\mathscr{J}})$	*Confiance*
$\tilde{e}_k \leftarrow \hat{z}_k - (1-\Upsilon)\hat{e}_k - x_k$	*Erreur de décision douce*
$\mathbf{F} \leftarrow \mathbf{F} - \left(\mu_F^l\,(1-\Upsilon)\,\phi_{\mathsf{CNA}}(x_k) - \mu_F^g\,\Upsilon\,\hat{e}_k\right)\overline{\mathbf{U}}_{k:k-L_F+1}$	*Pour le filtre transverse*
$\mathbf{B} \leftarrow \mathbf{B} + \mu_B^l\,(1-\Upsilon)\,u_k\,\overline{\mathbf{U}}_{k-1:k-L_B} - \mu_B^g\,\Upsilon\,\hat{e}_k\,\overline{\hat{\mathbf{Z}}}_{k-1:k-L_B}$	*Pour le filtre récursif*
$G \leftarrow G + \mu_G^l\,(1-\Upsilon)\left(1 - \lvert u_k \rvert^2\right)$	*Pour le gain*

Performances — MAQ-16



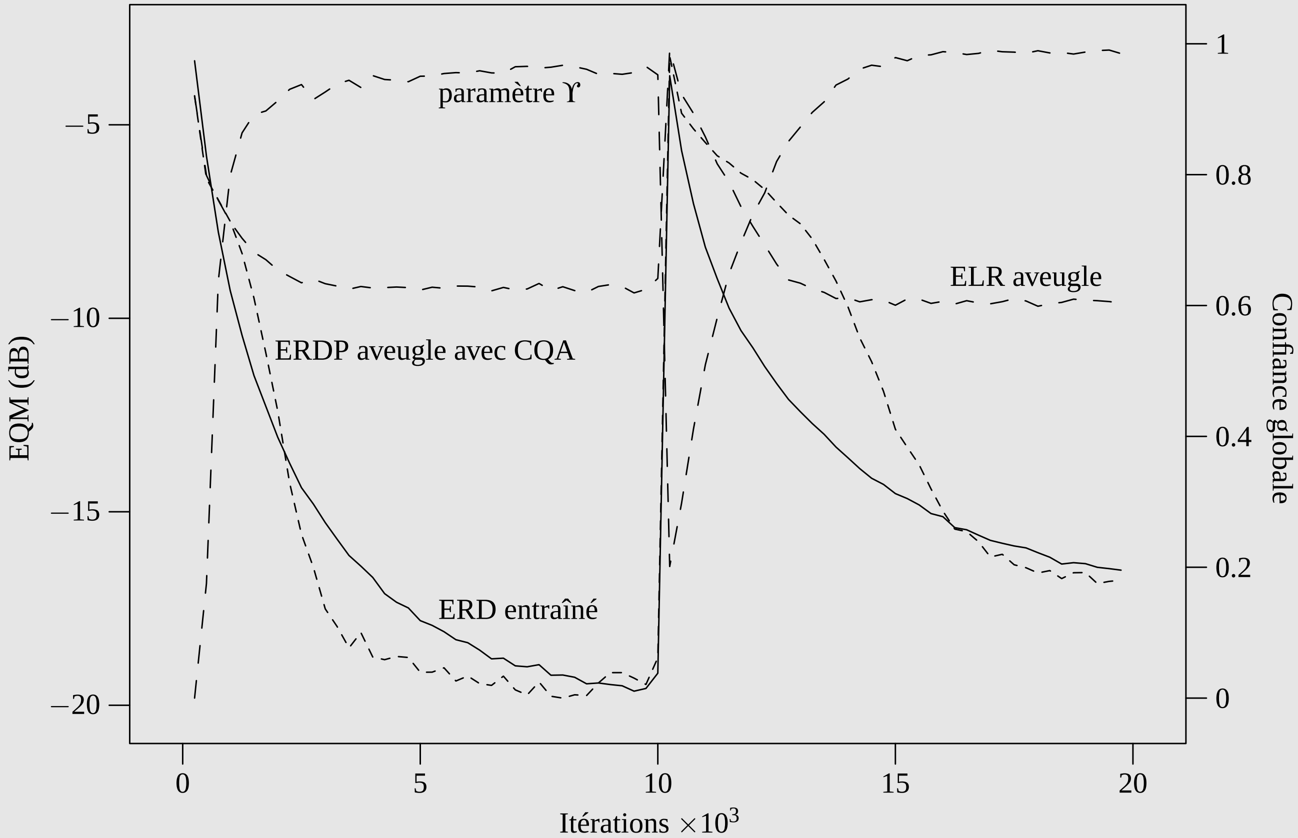
ERDP aveugle sur le second canal de Proakis.

Performances — MAQ-64



ERDP aveugle sur le second canal de Proakis.

Performances — Réactivité



ERDP aveugle sur le canal de Macchi pour une MAQ-16 avec un RSB de 25 dB. Jusqu'au 10 000-ème symbole le canal n'est composé que des quatre premiers coefficients.

Améliorations de l'ERDP aveugle

Les améliorations possibles sont, par exemple :

- Ajouter un récupérateur de phase
- Étudier la relation :

$$\text{critère globale} \Longleftrightarrow \text{confiance} \Longleftrightarrow \text{mélange}$$

- Faire un mélange entre plus de deux fonctions
- Étendre cet égaliseur aux canaux SIMO (grâce au SRM)

Conclusion

L'ERDP peut être rendu très performant en égalisation autodidacte tout en gardant une certaine simplicité grâce à :

- Son mélange de structures : ERD + ELR
- Un mélange d'algorithmes
- Un critère globale $\Longrightarrow$ une confiance globale
- Une classe d'algorithmes de bruit propre faible