

Concaténation de séquences complémentaires pour réduire le facteur de crête d' un signal OFDM

Yves LOUËT, Annick LE GLAUNEC, Pierre LERAY

Supélec

Campus de Rennes

Avenue de la Boulaie

35511 CESSON SÉVIGNÉ Cedex

Yves.Louët@supelec.fr, Annick.LeGlaunec@supelec.fr, Pierre.Leray@supelec.fr

Résumé – Nous présentons une méthode pour étendre à un grand nombre de porteuses le codage en séquences de Golay qui permet de réduire le facteur de crête d'un signal OFDM tout en gardant un taux de codage de 0.4. Cette méthode consiste à concaténer des séquences de Golay dont l'obtention est développée en [1]. Après la concaténation, le facteur de crête n'est plus minimal mais sa valeur est réduite de 9 dB par rapport au facteur de crête sans codage. De plus, la simulation de la méthode dans le cas d'un amplificateur non linéaire montre que les performances ne sont que peu dégradées lorsque le nombre de porteuses augmente.

Abstract – This paper presents a method of reducing the peak-to-mean power ratio based on the concatenation of Golay sequences developed in [1]. The advantage of the concatenation is to keep a reasonable coding code (0.4) even if the number of subcarriers increases. The drawback is the augmentation of the peak-to-mean power ratio which however is still 9 dB under the peak-to-mean power ratio without coding. The simulation in presence of a non linear amplifier shows the performances are not much affected when the number of carriers increases.

1. Introduction

La modulation multiporteuse, connue sous le nom de OFDM (multiplexage par division de fréquences orthogonales) suscite un intérêt considérable pour de nombreuses applications haut débit, particulièrement dans des canaux perturbés par des chemins multiples. Cette technique est utilisée entre autres dans les normes DAB, DVB-T, ADSL. Le principe de base est de grouper une suite de données haut débit en N symboles à débit plus lent, chacun étant transmis sur une porteuse séparée. Les interférences sont réduites à cause de la durée des symboles qui devient longue par rapport à la réponse impulsionnelle du canal. De plus la réalisation pratique de la modulation basée sur la transformée de Fourier rapide a profité des développements de l'intégration électronique de la FFT (Fast Fourier Transform). Malheureusement, un des inconvénients de l'OFDM est le fort rapport de la puissance maximum instantanée sur la puissance moyenne du signal qui oblige à prendre un recul important pour ne pas saturer l'amplificateur d'émission et réduit alors l'efficacité de puissance.

Le facteur de crête est le rapport de la puissance maximum instantanée sur la puissance moyenne du signal, appelé PMEPR (Peak to Mean Envelop Power Ratio). Soient N le nombre de porteuses, A_k pour $k=\{0,1,\dots,N-1\}$ les symboles complexes d'information et T_S la durée d'un symbole OFDM. L'enveloppe complexe du signal OFDM s'écrit :

$$S(t) = \sum_{k=0}^{N-1} A_k e^{2j\pi k \frac{t}{T_S}} \quad (1)$$

Et le facteur de crête de S(t) est :

$$PMEPR = \frac{\max |S(t)|^2}{\frac{1}{T_S} \int_0^{T_S} |S(t)|^2 dt} \quad (2)$$

Une des méthodes utilisées pour réduire le facteur de crête est de sélectionner les symboles qui présentent une faible puissance instantanée à l'aide d'un codage correcteur d'erreurs. Davis et Jewab [1] ont montré que des symboles obtenus par un codage basé sur les codes de Reed-Muller généralisés avaient un PMEPR de 3dB au lieu de $10 \log_{10} N$ dB pour des symboles sans codage.

2. Mise en œuvre du codage de Reed-Muller généralisé pour générer des séquences de Golay

Considérons deux séquences de N nombres compris entre 0 et $2^h - 1$: $a=(a_0, a_1, \dots, a_{N-1})$ et $b=(b_0, b_1, \dots, b_{N-1})$. Elles sont complémentaires si :

$$\Gamma_a(u) + \Gamma_b(u) = 2N \delta(u) \quad (3)$$

$\Gamma_a(u)$ et $\Gamma_b(u)$ sont les fonctions d'autocorrélation aperiodiques définies par :

$$\Gamma_a(u) = \sum_{k=0}^{N-1-u} e^{2j\pi \frac{a_k - a_{k+u}}{2^h}} \quad (4)$$

Une séquence complémentaire de Golay est une séquence qui admet une séquence complémentaire. Popovic [2] a montré qu'un signal OFDM obtenu par modulation de phase par une séquence de Golay a un PMEPR égal à 3 dB.

Davis et Jewab ont donné une méthode d'obtention d'un tel signal. Considérons un code de Reed-Muller RM(1, m) du premier ordre de paramètre m. Sa matrice génératrice est G dont on appelle les lignes x_l pour $l=1\dots m+1$. Si $i \in \{0, 1, \dots, 2^h - 1\}^m$ est un vecteur d'information et π une permutation quelconque de l'ensemble $\{1, 2, \dots, m\}$ la séquence :

$$a = 2^{h-1} \sum_{k=1}^{m-1} x_{\pi(k)} x_{\pi(k+1)} + G^T i \quad (5)$$

est une séquence de Golay. C'est-à-dire que le signal OFDM formé avec les symboles issus $A_k = e^{2j\pi \frac{a_k}{2^h}}$ d'une modulation de phase à 2^h états a un PMEPR de 3 dB. La longueur du mot de code 2^m est égal au nombre de porteuses N.

La séquence est formée de la somme d'un mot de code de Reed-Muller du premier ordre généralisé à un alphabet $Z/2^h$ et d'un mot de code particulier de Reed-Muller du deuxième ordre généralisé à l'alphabet $Z/2^h$ lui aussi.

Le taux de codage τ dépend de h et du nombre de porteuses $N=2^m$ par l'équation suivante :

$$\tau = \frac{\left\lfloor \log_2 \frac{m!}{2} \right\rfloor + h(m+1)}{h2^m} \quad (6)$$

Pour une modulation de phase à 4 états ($h=2$), le taux de codage est égal à 0.4 pour 16 porteuses, 0.26 pour 32 porteuses, 0.17 pour 64 porteuses : il devient faible lorsqu'on augmente le nombre de porteuses.

Pour avoir un taux de codage raisonnable, nous avons d'abord mis en œuvre le codage et le décodage avec une modulation de phase à 4 états (MDP-4) pour 16 porteuses.

Le décodage à décision dure est tout d'abord fait en suivant la méthode proposée par Jewab et Davis[1] qui consiste à retrancher du mot reçu les mots de code du deuxième ordre possibles puis à décoder le mot restant en utilisant la transformée d'Hadamard sur les 2 bits du symbole MDP-4, puis à déterminer le mot le plus proche du mot reçu.

Pour améliorer les performances, un décodage à décision pondérée a été mis en œuvre par l'adaptation de l'algorithme de Chase [3] au décodage symboles par symboles [5] pour une modulation MDP-4. Si R_k sont les symboles reçus d'un symbole OFDM R, la méthode consiste à :

- faire le décodage à décision dure
- sélectionner les symboles les moins fiables
- les remplacer par leur plus proches voisins dans la constellation
- recommencer le décodage à décision dure pour chaque mot test formé avec ces nouveaux symboles
- sélectionner le mot le plus proche du mot reçu.

Soient C^0, C^1, C^2, C^3 les quatre symboles possibles MDP-4, C_k^l le symbole à décision dure du symbole reçu R_k . La fonction de fiabilité est égale à :

$$\min_{j \neq l} \left[d_E(R_k, C_k^l) - d_E(R_k, C_k^j) \right]$$

Où d_E est la distance Euclidienne entre les deux symboles considérés. La figure 1 montre le principe d'obtention de la fiabilité.

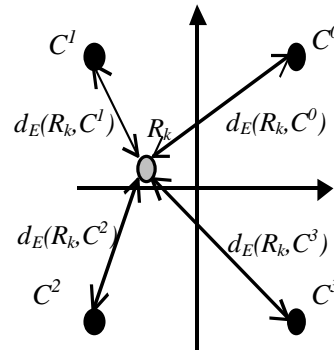


FIG. 1 : Constellation MDP-4 et principe des distances utilisées pour calculer la fiabilité d'un symbole reçu R_k .

La complexité du décodage augmente, mais on peut montrer par simulation que décoder 4 mots test comprenant 2 symboles les moins fiables fournit un bon compromis entre la complexité et les performances.

3. Concaténation des séquences complémentaires

La concaténation de λ séquences complémentaires de longueur N pour une transmission OFDM sur λN porteuses se fait selon le schéma suivant :

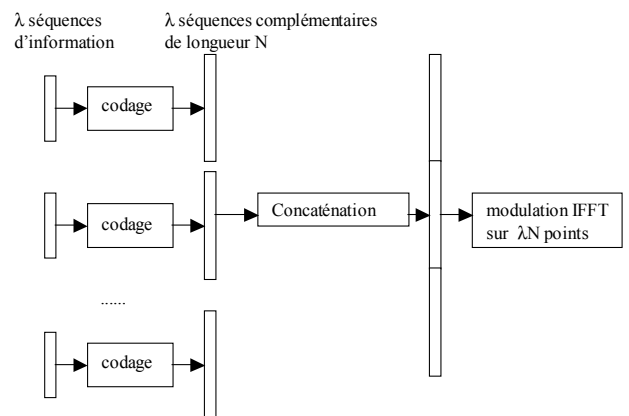


FIG. 2 : principe de la concaténation de λ séquences complémentaires de longueur N pour un symbole OFDM à λN porteuses

Exprimons le PMEPR du signal obtenu.

Le signal a la forme donnée par l'expression (1) où maintenant les données numériques A_k sont formées des λ séquences complémentaires de N données $\{A_{1,k}\}, \{A_{2,k}\}, \dots, \{A_{l,k}\}, \dots, \{A_{\lambda,k}\}$ pour $k=1, \dots, N-1$. et où le nombre de porteuses est λN .

En décomposant $S(t)$ sur ces λ séquences de N symboles, on obtient :

$$S(t) = \sum_{l=1}^{\lambda} e^{2j\pi(l-1)\frac{kt}{T_S}} \sum_{k=0}^{N-1} A_{l,k} e^{2j\pi\frac{kt}{T_S}} \quad (7)$$

On en déduit que :

$$|S(t)| \leq \sum_{l=1}^{\lambda} \left| \sum_{k=0}^{N-1} A_{l,k} e^{2j\pi\frac{kt}{T_S}} \right| \quad (8)$$

Cherchons un majorant du module d'un terme quelconque de la somme sur les séquences : nous procédons comme dans le cas d'une séquence complémentaire c'est-à-dire que nous allons considérer une deuxième séquence B complémentaire mais sur N points .

$$\left| \sum_{k=0}^{N-1} A_{l,k} e^{2j\pi\frac{kt}{T_S}} \right|^2 + \left| \sum_{k=0}^{N-1} B_{l,k} e^{2j\pi\frac{kt}{T_S}} \right|^2 = \sum_{u=-(N-1)}^{N-1} [\Gamma_a(u) + \Gamma_b(u)] e^{2j\pi\frac{ku}{T_S}} = 2N \quad (9)$$

De (8) et (9), on déduit que :

$$|S(t)|^2 \leq 2\lambda^2 N \quad (10)$$

Et comme la puissance moyenne est égale à λN le nombre de porteuses, le facteur de crête est alors égal à 2λ soit $(3 + \text{Log}_{10} \lambda) \text{ dB}$.

Le tableau 1 montre la comparaison des facteurs de crête en decibels pour $N=16$ et pour différents nombres de porteuses.

TAB. 1 : valeurs des facteurs de crête pour différentes concaténations de séquences complémentaires de longueur 16

nombre de porteuses	PMEPR avec codage	PMEPR sans codage
16	3 dB	12 dB
32	6 dB	15 dB
64	9 dB	18 dB

4. Résultats des simulations de la concaténation des séquences obtenues par codage de Reed-Muller

L'effet du codage et du décodage a été simulé sur une chaîne de transmission OFDM avec une modulation MDP-4 et un élément non linéaire modélisé par un amplificateur à ondes progressives suivant le modèle classique [5]. Le schéma de principe de la chaîne est présenté sur la figure 3. :

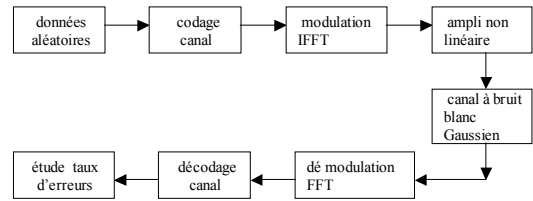


FIG. 3 : Schéma de principe de la chaîne de transmission

Le codage est réalisé par la concaténation de 2 (resp.4) séquences de longueur 16 symboles MDP-4 obtenus chacun par un codage de Reed-Muller généralisé de longueur de mot d'information de 13 bits et de mots de code de 32 bits (16 symboles MDP-4). Les symboles sont transmis sur 32 (resp.64) porteuses. La puissance de saturation de l'amplificateur a été fixée au maximum de puissance du signal modulé pour 16 porteuses sans codage.

Les taux d'erreurs binaires sont données sur les figures suivantes et comparés au cas où les séquences ne sont pas concaténées, c'est-à-dire pour 16 porteuses

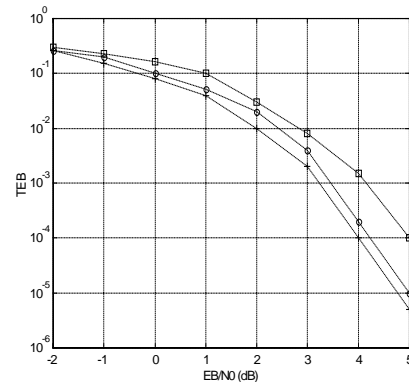


FIG. 4 : taux d'erreurs binaires en fonction du rapport signal sur bruit dans le cas d'une non-linéarité d'amplitude : --+-- : $N=16$, --o-- : $N=32$, --□-- : $N=64$ $\alpha_a = 1$ et $\beta_a = 0.25$

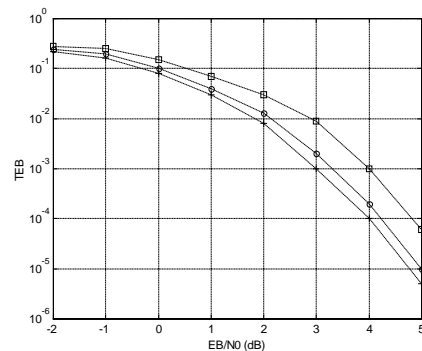


FIG. 5 : taux d'erreurs binaires en fonction du rapport signal sur bruit dans le cas d'une non-linéarité de phase : --+-- : $N=16$, --o-- : $N=32$, --□-- : $N=64$ $\alpha_\phi = \pi/6$ et $\beta_\phi = 0.5$

Les deux types de figures correspondent au cas où on tient compte de la non linéarité de l'amplitude (figure 4) et de la non linéarité de la phase (figure 5).

Malgré une plus forte dynamique, on constate que le cas de $N=64$ porteuses a des performances certes moins bonnes que pour $N=16$ et 32 mais largement comparables : l'ordre de grandeur de l'écart est de 1 dB pour un taux d'erreurs binaires de l'ordre de 10^{-4} . On a ainsi réalisé ici un système de 64 porteuses ayant un facteur de crête de 9 dB aux performances sensiblement identiques au cas de 16 porteuses. Le taux de codage est toujours égal à 0.4. Ces résultats s'expliquent de la manière suivante : le théorème de la limite centrale nous montre le caractère gaussien du signal OFDM modulé. Ainsi, on peut montrer [4] que les maxima du signal OFDM, responsables des distorsions, sont d'autant plus rares et importants que N est grand. En effet, la probabilité p_{max} que le signal OFDM à N porteuses atteigne ces valeurs (maxima) est du type :

$$p_{max} \approx \frac{\lambda_1}{\sqrt{N}} e^{-\lambda_2 N} \quad \text{où } \lambda_1 \text{ et } \lambda_2 \text{ sont des constantes positives}$$

Cette probabilité est donc d'autant plus faible que N est grand. D'autre part, du fait que le facteur de crête d'un signal OFDM soit égal à N , les valeurs des maxima sont proportionnelles à N . Ainsi, en considérant 64 porteuses, la probabilité d'apparition des maxima est plus faible qu'avec 16 porteuses et les erreurs occasionnées par ces maxima dans le cas de leurs apparitions seront corrigées grâce au codage introduit.

5. Conclusion

Nous présentons une méthode de concaténation de séquences complémentaires de longueur 16 symboles MDP-4 obtenues par codage de Reed-Muller généralisé pour réduire le facteur de crête d'un signal OFDM tout en conservant un taux de codage de 0.4. Pour diminuer le taux d'erreurs résiduelles, le décodage est un décodage pondéré utilisant l'algorithme de Chase. Les séquences complémentaires permettent de concevoir un signal OFDM de facteur de crête égal à 2 : la concaténation de λ séquences complémentaires fournissent un signal OFDM de facteur de crête égal à 2λ . Dans tous les cas la modulation est une modulation de phase. Une direction de recherche serait de pouvoir obtenir un signal à faible facteur de crête basé sur une modulation d'amplitude en quadrature à un nombre d'états supérieur à 4.

Références

- [1] J.A Davis, J. Jewab, *Peak to mean power control in OFDM, Golay complementary sequences and Reed-Muller codes*, IEEE Tran. On Inform. Theory, Vol45, n°7, Nov 1999.
- [2] B;M; Popovic, *Synthesis of power efficient multitone signals with flat amplitude spectrum*, IEEE Trans. On. Comm., Vol39, n°7, Jul. 1991.

- [3] D. Chase, *A class of algorithm for decoding block codes with channel measurements information*, IEEE Trans. On Inform. Theory, Vol 18, n°1, Jan. 1972.
- [4] Y. Louët, *Mise en oeuvre et performances des codes de Reed-Muller pour la réduction du facteur de crête dans la modulation OFDM*, Thèse de l'Université de Rennes I Octobre 2000.
- [5] Y. Louët, A. Le Glaunec, *Peak factor reduction in OFDM by Reed-Muller channel coding : a new soft decision decoding algorithm*, IEEE Proceedings of MELECON 2000, Limassol, Cyprus, May 2000.
- [6] A. Saleh, *Frequency independent and frequency dependant nonlinear models of TWT amplifiers*, IEEE Trans. Comm., Vol.COM-29, Nov 1981.